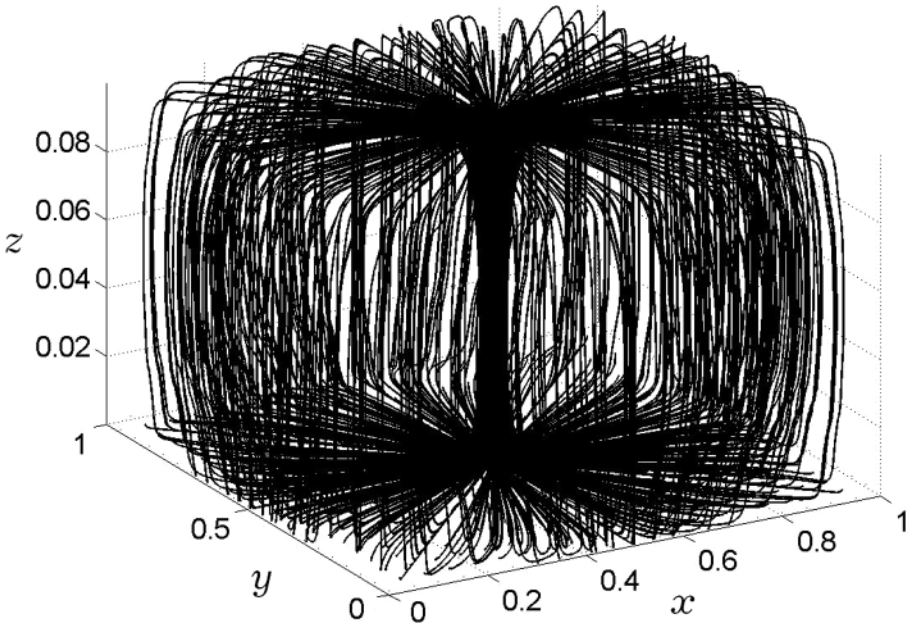
Тюменский индустриальный университет

А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Учебное пособие



Москва
2017

УДК 519.63+533.6
ББК 22.193
О26

Рецензенты:

Кутрунов Владимир Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Алгебра и математическая логика», Тюменский государственный университет;

Гербер Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент, Тюменское высшее военно-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А.И. Прошлякова

Обухов А.Г., Сорокина Е.М.

О26 Численное моделирование трехмерных нестационарных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа [Текст] : учебное пособие / А. Г. Обухов, Е. М. Сорокина. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2017. – 94 с.

ISBN 978-5-91327-470-0

Учебное пособие посвящено описанию математического и численного моделирования сложных течений газа в конвективных потоках, наблюдающихся при локальном нагреве подстилающей поверхности. Рассматривается математическая модель возникновения и продолжительного существования подобных конвективных течений – полная система уравнений Навье – Стокса с учетом действия силы тяжести. Численное построение решений полной системы уравнений Навье – Стокса при соответствующем выборе начальных и краевых условий позволяет моделировать указанные сложные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в трехмерном нестационарном случае.

Учебное пособие, прежде всего, предназначено для подготовки аспирантов направления 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника» по профилю 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Кроме того, учебное пособие будет полезно научным работникам, преподавателям, магистрантам и студентам, интересующимся содержательными задачами газовой динамики, а также аналитическими и численными методами решения систем нелинейных уравнений с частными производными.

УДК 519.63+533.6
ББК 22.193

ISBN 978-5-91327-470-0

© Обухов А.Г., Сорокина Е.М., 2017
© ИД «Академия Естествознания»
© МОО «Академия Естествознания»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

Глава I. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКОМУ И ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ 6

§1. Основные понятия и термины конвективного движения сплошной среды 8

§2. Обзор основных математических моделей конвективных течений сплошных сред 17

§3. Особенности аналитического и численного моделирования различных задач конвекции сплошных сред 25

Глава II. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА 33

§4. Определение начальных условий для полной системы уравнений Навье – Стокса 33

§5. Постановка краевых условий задачи возникновения и функционирования свободного теплового конвективного потока и их конечно-разностная аппроксимация 39

§6. Конечно-разностная аппроксимация полной системы уравнений Навье – Стокса 49

§7. Программно-вычислительный комплекс и несколько способов его тестирования 56

Глава III. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ 61

§8. Численное моделирование конвективных течений при локальной кольцевой схеме нагрева 61

§9. Численное исследование конвективных течений в зависимости от степени нагрева 73

§10. Численное моделирование конвективных течений при локальной круговой схеме нагрева 78

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 83

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 84

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие посвящено описанию применения математического моделирования и численных методов для исследования сложных течений вязких сжимаемых теплопроводных газов в тепловых конвективных потоках. Рассматриваются процессы возникновения и динамики трехмерного нестационарного движения газа при учете силы тяжести как сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды в тепловых конвективных потоках.

Возникновение конвекции заметно влияет на динамику потоков сплошной среды: значительно усиливаются теплообмен, диффузия, изменяются характерные скорости и другие характеристики потока. Такого рода явления могут играть как положительную, так и отрицательную роль в ряде технологических процессов. Ввиду этого, задача управления конвекцией является чрезвычайно актуальной. Неравномерный нагрев сплошной среды приводит, в силу теплового расширения, к появлению неоднородностей плотности. В поле силы тяжести это является причиной возникновения переменной по пространству силы и, как следствие, сложного движения среды.

Конвекция играет важную роль в ряде технологических процессов, эффективность которых может быть значительно улучшена подавлением или усилением конвекции. Так, например, в процессе выращивания кристаллов важно подавить развитие ячеистых возмущений, существенно ухудшающих свойства получаемого образца. Обратная ситуация наблюдается при растворении примесей и перемешивании веществ: важно усилить конвекцию, чтобы интенсифицировать указанные процессы. Таким образом, задачи управления конвекцией являются важными в технологических приложениях.

Несмотря на достаточно большое количество публикаций, обилие экспериментальных исследований, различных подходов в выборе математических моделей и способов их численной реализации, возможности адекватного описания и практического применения конвективных течений сплошной среды еще далеки от завершения. Математическое моделирование рассматривается как важный и часто единственный инструмент исследования сложных движений сжимаемой сплошной среды.

Основными целями предлагаемого учебного пособия являются:

1. Математическое моделирование трехмерных нестационарных течений газов при условии действия силы тяжести как сжимаемых вязких

теплопроводных сплошных сред в тепловом конвективном потоке, вызванном различным по конфигурации локальным нагревом подстилающей поверхности.

2. Численное построение решений полной системы уравнений Навье – Стокса, описывающих возникновение сложных трехмерных нестационарных течений газов в конвективных потоках и учитывающих диссипативные свойства вязкости и теплопроводности в областях с разными геометрическими характеристиками.

Результаты математического и численного моделирования сложных нестационарных трехмерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа позволяют сформулировать конкретные рекомендации для более эффективной работы по обслуживанию и эксплуатации нефтепроводов и газопроводов. Не менее важны и рекомендации по хранению жидких и газообразных веществ в различных емкостях, контейнерах и хранилищах.

Глава I. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКОМУ И ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Термин конвекция (от лат. *convectio* – принесение, доставка) означает перемещение макроскопических частей сплошной среды (газа, жидкости), которое приводит к переносу массы, тепла и других физических величин. Если конвекция возникает за счет неоднородности сплошной среды (градиенты плотности, концентрации, температуры), то ее называют естественной (свободной) конвекцией. Если же конвекция вызвана внешним механическим воздействием на сплошную среду (например, вибрацией), то она называется вынужденной конвекцией. Градиенты плотности могут быть вызваны как локальным нагревом среды, так и разностью концентраций в жидких или газовых смесях. Наличие же в сплошной среде градиентов плотности приводит к превращению потенциальной энергии гравитации в кинетическую энергию движения под действием сил плавучести. Примером таких свободных конвективных течений является циркуляция воздушных масс в атмосфере Земли из-за солнечного нагрева.

В последние годы значительно расширился круг задач, в основе которых лежат свободные конвективные течения. Естественная конвекция сплошной среды как один из видов макроскопического движения интенсивно изучается в современной фундаментальной науке. Экспериментальные и теоретические исследования естественной конвекции привели к ее выделению в самостоятельный раздел механики сплошной среды.

Изучение самые различных процессов, определяющих механизмы естественной конвекции, имеет значительную познавательную ценность. А с развитием наукоемких технологий существенно возрастает и прикладная значимость получаемых результатов. Полученные результаты и достижения в исследовании естественной конвекции применяются в геофизике, астрофизике, экологии, метеорологии, теплоэнергетике, металлургии, химии, кристаллофизике и других научных отраслях. В частности, интерес к тепломассопереносу в жидких металлах вызван их применением в качестве теплоносителей в ядерных, термоядерных и космических энергетических установках. Натрий используется в качестве теплоносителя в установках с реактором на быстрых нейтронах. При благоприятной компоновке трубопроводов в них может возникать свободная конвекция натрия, приводящая к прогреву трубопроводов и увеличению тепловых потерь. В этой связи чрезвычайно востребованными становятся результаты экспериментальных исследований свободной конвекции натрия в длинных замкнутых цилиндрических сосудах, ориентированных под различными углами к направлению силы тяжести. Результаты таких исследований могут быть использованы как при проектировании новых реакторных установок, так и при верификации расчетных кодов, используемых в атомной энергетике.

Широкое применение эти результаты находят и в различных отраслях промышленности и сельского хозяйства, в частности, в нефтегазовой отрасли. Возрастающая точность измерений и сложность математических моделей позволяют успешно решать новые задачи, например, получение сверхчистых материалов при пониженной гравитации.

Интенсивное развитие космических технологий привело к возрастанию публикаций, касающихся термокапиллярной конвекции. В условиях Земли данный вид конвекции локализован вблизи свободной поверхности, а в тонких слоях жидкости толщиной порядка миллиметра термокапиллярная конвекция является основным видом конвективного течения жидкости.

Исследование свойств движущейся сплошной среды, будь то газовая смесь, вода, нефть или химический раствор, приводит к необходимости изучения ее внутреннего состояния. Для сплошной среды, находящейся в состоянии покоя, большое значение имеют формулировки законов воздействия внешних факторов, способных при определенных условиях привести к потере устойчивости механического равновесия. Практический интерес имеет решение задач о формировании конвекции в жидкости или газе.

Динамика развития конвективных течений существенным образом зависит от граничных, краевых условий или наличия внутренних источников. Кроме того, значительное влияние могут оказывать внутренние поверхности раздела жидкости или газа, фронты химических реакций, потоки тепла и примеси.

Все возникающие в движущейся сплошной среде процессы являются нестационарными и нелинейными, что значительно затрудняет их изучение. Экспериментальное исследование таких задач связано со сложностью воспроизведения условий, в которых наблюдается явление, с проблемами соблюдения высокой точности измерений в исследуемой области, а также со значительными энергетическими и ресурсными затратами. Поэтому в настоящее время одним из актуальных способов исследования широкого диапазона конвективных течений сплошной среды представляется метод математического моделирования. Существенное влияние при этом имеет выбор соответствующей математической модели, адекватной исследуемому явлению. Это заранее позволяет определить параметры задачи, соответствующие преобладающим процессам.

Не менее важным аспектом является методика проведения численных исследований математической модели. Разработка численных схем и построение оптимальных вычислительных алгоритмов, проведение расчетов сложных течений должны быть связаны с аналитическими свойствами модельных уравнений, определяющими асимптотики и предельные решения общих уравнений.

Моделирование конвективных течений сплошной среды представляет собой комплекс задач и проблем, возникающих при описании и прогнозировании природных явлений, динамики различных технологических процессов. Изучение полей скорости вблизи границ раздела и в поверхностных слоях

позволяет эффективно учитывать явления переноса температуры и примеси, определять формы воздействия внешних факторов. Для описания таких процессов необходимо использование новых все более сложных математических моделей тепловой и концентрационной конвекции.

§1. Основные понятия и термины конвективного движения сплошной среды

В данном параграфе даются понятия, характеризующие движущуюся сплошную среду, формулируются уравнения движения жидкости под действием внешних и внутренних сил, а также тепловых источников. Этот классический раздел механики сплошной среды подробно излагается, например, в работах [1–6]. Следуя [7], приведем основные термины и гипотезы механики сплошной среды.

Основные гипотезы сплошной среды. Механика сплошных сред основана на справедливости:

1) классической механики Ньютона;
2) классической термодинамики;
3) гипотезы сплошности.

Классическая механика Ньютона предполагает, что изучаются движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассматриваются макроскопические объекты, размеры которых существенно превосходят размеры микромира.

Классическая термодинамика предполагает, что в окрестности каждой точки среда находится в состоянии термодинамического равновесия или близкой к нему, вследствие чего можно пользоваться законами классической термодинамики.

Гипотеза сплошности предполагает замену реальной среды с ее дискретным молекулярным строением моделью сплошного распределения вещества по рассматриваемому объему.

Элементарная частица. Элементарной называется частица, размеры которой должны быть пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами изучаемого явления, но достаточно велики, чтобы не учитывать молекулярную структуру движущейся среды. В этом случае говорят о бесконечно малом объеме среды, эффективно равном нулю. При этом следует различать понятия точки пространства и элементарной частицы. Точка есть место в пространстве, а частица – малая часть материального объема. Совокупность элементарных частиц, во все время движения остающихся на одном контуре, поверхности или в объеме, называется, движущимся контуром, движущейся поверхностью или движущимся объемом соответственно.

Следует заметить, что принятие гипотезы сплошности как основы математического описания поведения движущихся сред означает, что функции, характеризующие их состояние, должны быть гладкими, то есть непрерывными и дифференцируемыми и по времени и по пространственным переменным.

Перейдем к определению некоторых фундаментальных величин механики сплошной среды.

Плотность. Плотность среды в данной точке находится как предел отношения массы, заключенной в некотором объеме среды, к величине этого объема, при условии стремления этого объема к нулю. Ее размерность в СИ [ρ] = кг/м^3.

Объемные и поверхностные силы. Силы, действующие на сплошную среду, подразделяются на объемные и поверхностные. К объемным (массовым) силам принадлежат, например, силы тяжести, силы инерции, центробежная сила. Объемные силы действуют в каждой точке элементарного объема сплошной среды.

К поверхностным силам относятся силы, которые действуют на элемент поверхности, или часть граничной или любой внутренней поверхности. Поверхностные силы задаются тензором второго ранга (тензором напряжений). Это означает, что напряженное состояние в произвольной точке сплошной среды характеризуется девятью компонентами тензора напряжений P_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$.

Два способа описания движения сплошной среды. Переменные (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t) называются переменными Лагранжа, а (x_1, x_2, x_3, t) носят название переменных Эйлера. Основное отличие в описании движения в координатах Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в первом случае величины (x_1, x_2, x_3) – это переменные координаты движущихся частиц сплошной среды, во втором случае – это координаты фиксированных точек пространства, мимо которых в данный момент времени проходят различные частицы сплошной среды.

Интегральные законы сохранения. Важнейшими характеристиками материального объема являются его масса, импульс (количество движения), момент количества движения и полная энергия.

Из системы законов сохранения соответствующей механической величины вытекает система дифференциальных уравнений.

Уравнение неразрывности – дифференциальная форма закона сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{V} = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение импульса – дифференциальная форма закона сохранения импульса

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \operatorname{div} P + \rho \mathbf{f} = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение притока тепла – дифференциальная форма закона сохранения энергии

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div}\mathbf{q} + \rho h. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) t – время; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости движения частиц среды; P – тензор напряжений; div$P$ – есть вектор с компонентами

$$(\operatorname{div} P)_i = \frac{\sum_{j=1}^{3} \partial P_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{f}$ – плотность массовых внешних сил; U – удельная внутренняя энергия; D – тензор скоростей деформаций с элементами

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{1.5}$$

$P{:}D$ – свертка тензоров P и D имеет вид

$$P{:}D = \sum_{j=1}^{3} P_{ij}\, D_{ij}; \tag{1.6}$$

$\mathbf{q}$ – вектор потока тепла; h – объемная плотность внутренних источников тепла. Первый дифференциальный оператор в уравнениях (1.1)–(1.3) – оператор $\frac{d}{dt}$ – носит название оператора полного дифференцирования по времени и состоит из суммы двух операторов – оператора локального частного дифференцирования по времени и оператора конвективного дифференцирования по времени. Например, полная производная по времени некоторой величины F может быть представлена в виде

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}; \frac{\partial F}{\partial x_3}\right). \tag{1.7}$$

Совокупность уравнений (1.1), (1.2), (1.3) образует математическую модель непрерывных движений сплошной среды. Эта модель не является замкнутой, так как содержит пять скалярных уравнений и четырнадцать (с учетом симметрии тензора напряжений P) искомых функций: ρ, v_1, v_2, v_3, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{22}, P_{23}, P_{33}, U, q_1, q_2, q_3. Плотность массовых внешних сил $\mathbf{f}$ и объемная плотность внутренних источников тепла h считаются известными. Поэтому возникает проблема замыкания модели, которая должна решаться при анализе дополнительной информации.

Элементы термодинамики. Учет тепловой энергии в модели (1.1)–(1.3) требует привлечения законов термодинамики. Термодинамика изучает связи между тепловой энергией и другими видами энергии, в первую очередь механической энергией, и устанавливает закономерности взаимного превращения одного вида энергии в другой.

Основное понятие термодинамики – понятие состояния среды. Феноменологическое описание состояния идеальной сплошной среды осуществляется с помощью следующих пяти параметров состояния:

– удельная внутренняя энергия U [Дж];

– плотность ρ [кг/м^3] или удельная плотность $\rho = 1/V$, где V называется удельным объемом;

– абсолютная температура T [К];

– удельная энтропия s [Дж/(кг·К)];

– давление p [Н/м^2].

Если для сплошной среды такой набор параметров состояния установлен, то следующей задачей будет нахождение всех возможных соотношений между этими параметрами. Такие соотношения вытекают из общих физических законов и опытных закономерностей, описывающих поведение рассматриваемой сплошной среды. В первую очередь необходимо учесть законы термодинамики.

Первый закон термодинамики утверждает, что если в некотором элементарном физическом процессе сплошной среде сообщено количество тепла δQ, то она совершит механическую работу δA, а внутренняя энергия среды получит приращение dU, то есть всегда справедливо равенство

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{1.8}$$

Этот физический закон, устанавливающий эквивалентность тепловой и механической энергии, является термодинамическим выражением закона сохранения энергии. Использование разных обозначений означает, что dU есть дифференциал U, а δQ и δA обозначают бесконечно малые количества теплоты и работы.

Второй закон термодинамики утверждает, что при любом процессе, идущем в теплоизолированной сплошной среде (без внешнего подвода или отвода тепла), энтропия этой среды не убывает, то есть для элементарных процессов

$$Tds \geq \delta Q, \tag{1.9}$$

где ds – дифференциал функции s. При этом процесс обратим, когда справедливо равенство $Tds = \delta Q$. Для таких процессов справедливо основное термодинамическое тождество

$$Tds = dU + pdV. \tag{1.10}$$

В предположении, что идеальная сплошная среда двухпараметрическая и в последнем равенстве (1.10) стоят полные дифференциалы, то можно найти два соотношения между этими пятью параметрами состояния. Поэтому для полного описания термодинамического состояния такой двухпараметрической среды достаточно задать еще одно соотношение, которое называется уравнением состояния. В приложениях чаще всего используются уравнения состояния следующего вида:

– внутренняя энергия задается как функция объема V и энтропии s:

$$U = U(V, s); \tag{1.11}$$

– теплосодержание (энтальпия) как функция от давления p и энтропии s:

$$I = I(p, s) = U + pV; \tag{1.12}$$

– свободная энергия как функция от объема V и температуры T:

$$F = F(V, T) = U - Ts; \tag{1.13}$$

– термодинамический потенциал как функция от давления p и температуры T:

$$\Psi = \Psi(p, T) = U - Ts + pV. \tag{1.14}$$

Поскольку основной мерой количества тепла является температура, то потоки тепла и вызываются ее разностью. В термодинамике этот факт формулируется как закон Фурье:

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T, \tag{1.14}$$

где κ – новый параметр состояния – коэффициент теплопроводности. Теперь уравнение притока тепла приводится к виду

$$\rho\frac{dU}{dt} = P:D + \operatorname{div}\left(\kappa\nabla T\right) + \rho h. \tag{1.15}$$

Для полного замыкания системы дифференциальных уравнений механики сплошных сред требуется еще шесть уравнений. Эти уравнения, называемые также уравнениями состояния, связывают тензор напряжений с движением (или перемещением). Эти связи имеют различный вид для жидкостей и твердых тел и лежат в основе классических моделей сплошных сред – жидкостей и газов.

Классические модели жидкости и газа

Аксиомы Стокса. Газы и жидкости представляют собой легко подвижные сплошные среды, которые не остаются в равновесии, даже если на них действуют как угодно малые силы. Как показывает опыт, внутренние напряжения в жидкостях и газах существенно зависят от того, насколько быстро происходит деформация, то есть от скорости деформации. В феноменологической теории обычно дается следующее определение: жидкость или газ – это такая сплошная среда, в которой тензор напряжений P является функцией тензора скоростей деформации D. Тензор напряжений также может зависеть от совокупности термодинамических параметров состояния, от местоположения точки пространства $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t, то есть

$$P = f(D, \rho, U, T, s, p, \mathbf{x}, t). \tag{1.16}$$

Для жидкостей и газов предполагается выполнение аксиом Стокса, которые конкретизируют зависимость (1.16):

– среда однородна, то есть f не зависит явно от величин $\mathbf{x}$, t;

– среда изотропна, то есть f является изотропной тензорной функцией тензора скоростей деформации D;

– покоящаяся среда идеальна, то есть

$$P = f(0, \rho, U, T, s, p) = -pI, \tag{1.17}$$

где p – давление; I – единичный тензор.

Изотропность тензорной функции f приводит к зависимости

$$P = \alpha I + \beta D + \zeta D^2, \tag{1.18}$$

где α, β, ζ являются функциями инвариантов тензора скоростей деформации D и термодинамических параметров состояния.

Термодинамическое состояние жидкостей и газов достаточно хорошо описывается равенством (1.10), которое справедливо лишь для обратимых процессов. Классическая термодинамика рассматривает состояния среды, близкие к равновесным, и взаимные превращения одного вида энергии в другой в этих состояниях. Жидкости и газы обычно считаются двухпараметрическими средами, что выполняется при рассмотрении однофазных однокомпонентных движений.

Если независимыми параметрами считать плотность ρ и удельную энтропию s, тогда задается удельная внутренняя энергия $U = U(\rho, s)$ и из (1.10) следуют формулы

$$T = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s}; \quad p = \rho^2 \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho}. \tag{1.19}$$

Коэффициент теплопроводности κ, входящий в уравнение притока тепла (1.15), также считается известной функцией параметров состояния $\kappa = \kappa(\rho, s)$.

Иногда считают независимыми параметрами состояния абсолютную температуру и плотность, то есть задается $U = U(\rho, T)$. Тогда из (1.10) следует

$$ds = \frac{1}{T} U_T \, dT + \frac{1}{T}\left(U_\rho - \frac{p}{\rho^2} \right) d\rho \tag{1.20}$$

и выражение в правой части этого тождества будет полным дифференциалом, если существует функция $f(T, \rho)$ (свободная энергия) такая, что

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{f}{T} \right); \quad p = \rho^2 f_\rho, \tag{1.21}$$

а $\kappa = \kappa(\rho, T)$.

Практический интерес представляет теплоемкость, то есть, количество тепла, которое необходимо сообщить единице массы, чтобы увеличить ее температуру на один градус при обратимом изменении состояния $c = \dfrac{\delta Q}{dT}$. Различают удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и при постоянном объеме c_V:

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p; \tag{1.22}$$

$$c_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{V=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \tag{1.23}$$

Здесь учтен закон сохранения (1.10). Введение энтропии дает возможность получить и другие выражения для удельных теплоемкостей. Действительно, поскольку для обратимых процессов $Tds = \delta Q$, то

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{dT}\right)_p; \quad c_V = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V. \tag{1.24}$$

Замкнутая модель, основанная на аксиомах Стокса, состоит из уравнений (1.1), (1.2), (1.15), (1.18) содержит пять уравнений относительно пяти неизвестных функций – трех компонент вектора скорости и двух независимых параметров состояния. Тем не менее, эта модель очень редко рассматривается в качестве рабочей, поскольку требует очень большой объем дополнительной информации для определения коэффициентов α, β, ζ в (1.18).

Ньютоновские сплошные среды. Более употребительной и достаточно общей является классическая модель сплошной среды. Она основана на том, что зависимость тензора напряжений (1.18) линейна

$$P = \alpha I + \beta D. \tag{1.25}$$

Такие сплошные среды называют ньютоновскими. При этом

$$\zeta = 0; \quad \alpha = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}; \tag{1.26}$$

$$\operatorname{div} P = \nabla\left(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}\right) + \operatorname{div}(2\mu D); \tag{1.27}$$

$$P{:}D = -p \operatorname{div} \mathbf{V} + \Phi, \tag{1.28}$$

где диссипативная функция

$$\Phi = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\left(\operatorname{div} \mathbf{V}\right)^2 + 2\mu D' : D', \tag{1.29}$$

а

$$D' = D - \frac{1}{3}\operatorname{div} \mathbf{V} I \tag{1.30}$$

девиатор тензора D. Кроме того, введено обозначение $\mu = \frac{\beta}{2}$. Учитывая, что

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} = \rho T\frac{ds}{dt} - p \operatorname{div} \mathbf{V}, \tag{1.31}$$

получим классическую модель движения ньютоновской сплошной среды

$$\rho_t + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \tag{1.32}$$

$$\rho\left[\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}\right] = \nabla\left(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}\right) + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho \mathbf{f}; \tag{1.33}$$

$$T\rho\left(s_t + \mathbf{V}\cdot\nabla s\right) = \operatorname{div}\left(\kappa\nabla T\right) + \Phi + \rho h, \tag{1.34}$$

в которой λ, μ, κ считаются известными функциями двух независимых параметров состояния, а p, ρ, s, T связаны двумя соотношениями (1.19) или (1.21). Данная модель замкнута, а коэффициенты λ и μ называются коэффициентами

динамической вязкости и отражают свойства сплошной среды сопротивляться сдвиговым усилиям.

Из модели (1.32)–(1.34) получаются хорошо известные и достаточно простые частные модели сплошной среды.

Модель идеальной несжимаемой жидкости. В этом случае $\mu = 0$, а условие несжимаемости $\rho = \text{const}$ эквивалентно

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0;\ D' = D, \tag{1.35}$$

а модель (1.32)–(1.34) значительно упрощается и приводится к виду:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \tag{1.36}$$

$$\rho\left[\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}\right] = -\nabla p + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho\mathbf{f}; \tag{1.37}$$

$$T\rho\left(s_t + \mathbf{V}\cdot\nabla s\right) = \operatorname{div}\left(\kappa\nabla T\right) + \Phi + \rho h. \tag{1.38}$$

Модель вязкой несжимаемой жидкости. В этой модели в термодинамическом отношении среда становится однопараметрической, поскольку давление p исчезает из термодинамических соотношений (так как $pdV = 0$) и не может рассматриваться как параметр состояния. Остается только один параметр состояния – температура T. Введя кинематическую вязкость $\mu' = \mu/\rho = \text{const}$ и преобразовав слагаемое в уравнении импульса (1.37) так:

$$\operatorname{div}(2\mu D) = 2\mu \operatorname{div} D = \mu\left[\nabla\left(\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \Delta\mathbf{V}\right] = \mu\Delta\mathbf{V}, \tag{1.39}$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ – оператор Лапласа, приходим к модели вязкой несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \tag{1.40}$$

$$\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mu'\Delta\mathbf{V} + \mathbf{f}. \tag{1.41}$$

Систему уравнений (1.40), (1.41) называют также системой Навье – Стокса, в которой термодинамика вообще не представлена. Температуру T можно определить из уравнения притока тепла (1.38), которое можно переписать в виде

$$T_t + \mathbf{V}\cdot\nabla T = \frac{1}{\rho c_V}\operatorname{div}\left(\kappa\nabla T\right) + \Phi' + \frac{h}{c_V}, \tag{1.42}$$

где

$$\Phi' = \frac{2\mu'}{c_V} D{:}D. \tag{1.43}$$

В этой модели сплошная среда описывается двумя величинами – вязкостью μ' и плотностью ρ, которые определяются из эксперимента.

Модель идеальной жидкости. Если вязкость сплошной среды несущественна, то $\mu' = 0$ и система уравнений в данной модели будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \tag{1.44}$$

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}. \tag{1.45}$$

Эта система называется системой уравнений Эйлера. Уравнение для температуры упрощается, если предположить, что коэффициент теплопроводности κ и удельная теплоемкость при постоянном объеме c_V постоянные. В этом случае уравнение притока тепла приобретает вид:

$$\frac{dT}{dt} = \chi \Delta T + \frac{h}{c_V}, \tag{1.46}$$

где $\chi = \dfrac{\kappa}{\rho c_V}$ – коэффициент температуропроводности.

Система уравнений газовой динамики. В отличие от жидкостей, газы являются сильно сжимаемыми средами, и вязкость газа часто бывает несущественна. Для быстропротекающих процессов в газе можно пренебречь и теплопроводностью. Принимая в (1.29), (1.32)–(1.34) $\lambda = \mu = \kappa = 0$, получаем систему уравнений газовой динамики:

$$\rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \tag{1.47}$$

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{f}; \tag{1.48}$$

$$s_t + \mathbf{V} \cdot s = 0; \tag{1.49}$$

$$p = f(\rho, s), \tag{1.50}$$

где последнее соотношение называется уравнение состояния газа.

Диссипация энергии. Свойства вязкости и теплопроводности жидкостей и газов проявляются в том, что сообщенная среде механическая энергия может необратимым образом перейти в тепловую, рассеяться в хаотическом тепловом движении молекул. Это рассеяние механической энергии называется диссипацией, а процессы, сопровождаемые диссипацией энергии – диссипативными процессами.

С точки зрения термодинамики, диссипативный процесс необратим и должен сопровождаться возрастанием энтропии. Обратно, рост энтропии какой-либо части сплошной среды, происходящий без «подкачки» тепловой энергии извне, служит признаком того, что в этой части среды идет диссипативный процесс.

В общем случае кинетическая энергия движущегося объема убывает. Это и есть проявление диссипативного процесса в вязкой несжимаемой жидкости, за который отвечает коэффициент вязкости μ.

Диссипативная функция Ф равна плотности скорости диссипации кинетической энергии. Этим, в частности, оправдано название «диссипативная функция» для величины Ф.

§2. Обзор основных математических моделей конвективных течений сплошных сред

Пермская гидродинамическая школа и её создатели – Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкий, внесла существенный вклад в развитие фундаментальной проблемы возникновения и устойчивости конвективных течений. В первых работах Е.М. Жуховицкого одновременно с решением новых задач конвективной устойчивости разрабатываются приближенные методы решения сложных краевых задач в докомпьютерную эпоху. Аналитическими методами в соавторстве с Г.З. Гершуни была исследована устойчивость разнообразных систем с интересными и нетривиальными свойствами [8–13].

С появлением быстродействующей вычислительной техники Е.М. Жуховицкий становится организатором большого числа крупных численных экспериментов. Исследуются устойчивость плоскопараллельных конвективных течений, устойчивость и нелинейные режимы конвекции в конечных полостях в поле тяжести и в вибрационных полях, конвективные течения и устойчивость этих течений при модулированных во времени или в пространстве полях температуры.

Е.М. Жуховицкий многие годы руководил аспирантурой кафедры теоретической физики ПГПУ. Среди его учеников профессора и доктора физико-математических наук Е.Л. Тарунин, Г.З Файнбург, Р.В. Бирих, О.Н. Дементьев, В.А. Саранин, А.К. Колесников.

Монография [8] посвящена исследованию устойчивости равновесия неравномерно нагретой жидкости и стационарного конвективного движения. Рассматривается конвективная устойчивость вязкой несжимаемой жидкости в полостях разной формы. Исследуется влияние на устойчивость различных факторов – магнитного поля, вращения, неоднородности состава, модуляции параметров, внутренних источников тепла, капиллярных эффектов и пр. Основное внимание уделяется изучению спектров возмущений, определению границ устойчивости и формы критических движений. Излагаются также основные результаты нелинейных исследований конечно-амплитудных движений. Рассматривается устойчивость плоскопараллельных конвективных течений.

Книга [9] посвящена устойчивости стационарных конвективных течений. Основное внимание уделяется плоскопараллельным течениям, на примере которых исследуются механизмы неустойчивости, свойства спектра возмущений, анализируется воздействие осложняющих факторов – стратификации, температурной зависимости вязкости, тепловых свойств границ. Изучается устойчивость конвективных течений бинарной смеси, проводящей, диэлектрической и неньютоновской жидкостей, среды с примесью. Обсуждаются течения, вызванные внутренним тепловыделением различной природы,

адвективные, виброконвективные и комбинированные течения. Рассматривается устойчивость конвективных пограничных слоев, замкнутых течений, а также вторичных режимов.

Впервые влияние модуляции конкретного параметра среды в задачах конвекции рассмотрено в работах [10, 11], где исследовано равновесие горизонтального слоя со свободными границами при периодическом изменении градиента температуры. При этом предполагалось, что частота модуляции мала, а амплитуда конечна. Несмотря на наличие ряда упрощающих предположений, качественные выводы этих работ показывают, что модуляция градиента температуры может приводить к возникновению областей неустойчивости резонансного типа.

Вибрационная конвекция в условиях невесомости впервые была рассмотрена в работе [12]. При невесомости определяющим физическим параметром является вибрационное число Рэлея.

Имеется цикл работ, в которых изучалась термокапиллярная конвекция в двухслойных системах с недеформируемой поверхностью раздела. В [13] рассмотрена многослойная система.

Опубликовано достаточно много статей, где рассматривалась конвекция либо при действии вертикальных вибраций, либо при осциллирующем градиенте температуры. Качественно новые результаты были получены при рассмотрении действия гармонических высокочастотных вибраций произвольного направления. В этих работах были выведены осредненные уравнения для областей с твердой границей. Проанализирован случай модельной задачи и показано, что направление вибрации оказывает существенное влияние на возникновение конвекции. Так, например, если направление вибрации содержит горизонтальную составляющую, то конвекция может возникнуть и при нагреве сверху. Подход, с использованием метода осреднения применялся в работах, обзор которых дан в монографии [14].

Содержание книги [15] охватывает весьма широкий круг вопросов тепло- и массообмена в однофазных средах. Основное внимание уделено изложению аналитических методов решения соответствующих задач. Последовательно изложены решения задач гидродинамики и теплообмена при ламинарном и турбулентном течении в трубах и при внешнем обтекании тел. Приводится решение ряда важных задач, связанных с развитием современной техники. Дана методика практических расчетов сложных задач массообмена.

Книга [16] посвящена описанию метода изучения и результатов исследования конвективных движений в свободной атмосфере, в том числе в облаках. Рассмотрена аппаратура, необходимая для измерений, и теория статистической интерпретации результатов наблюдений. Приведены данные, позволяющие установить основные параметры конвекции в атмосфере, изменение этих параметров в зависимости от различных физико-географических условий, механизм развития конвективных движений в атмосфере, а также связь между конвективными движениями вне и внутри облаков. Полученные результаты

имеют значение для понимания механизма конвекции и развития конвективной облачности и могут быть использованы для количественных представлений ряда явлений, вызванных конвекцией и связанных с нею.

Задачи конвективной устойчивости представляют интерес ввиду разнообразия факторов, вызывающих развал течений. Взаимодействие или конкуренция различных физических механизмов часто порождают красивые и неожиданные явления. Таким образом, изучение задач устойчивости конвективных течений представляет общенаучный интерес, а также создает предпосылки для построения общей теории турбулентности.

С другой стороны, возникновение конвекции заметно изменяет динамику многих движений: значительно усиливаются теплообмен, диффузия, характерные скорости потока и другие процессы переноса. Такого рода явления могут играть как положительную, так и отрицательную роль в ряде технологических процессов. Неравномерный нагрев жидкости приводит, в силу теплового расширения, к появлению неоднородностей плотности. В поле тяжести это является причиной возникновения переменной по пространству силы и, как следствие, движения жидкости [17].

Конвекция играет важную роль в ряде технологических процессов, эффективность которых может быть значительно улучшена подавлением или усилением конвекции [17]. Так, например, в процессе выращивания кристаллов важно подавить развитие ячеистых возмущений, существенно ухудшающих свойства получаемого образца. Обратная ситуация наблюдается при растворении примесей, перемешивании веществ: важно усилить конвекцию, чтобы интенсифицировать указанные процессы. Таким образом, задачи управления конвекцией являются важными в технологических приложениях.

Если единственной причиной движения является пространственная неоднородность температуры среды, находящейся в поле силы тяжести, то такое движение называют термогравитационной конвекцией [18]. В теоретических исследованиях термогравитационной конвекции различают внутренние и внешние задачи. В первом случае граничные условия для температуры и скорости ставятся на поверхности области, занятой жидкостью, во втором – на бесконечности. Хотя в эксперименте жидкость или газ всегда занимают ограниченный объем, такое разделение задач имеет смысл, так как в некоторых случаях состояние сплошной среды вдали от границ теплообмена можно считать заданным. В большинстве же случаев локальные условия конвективного теплообмена и общая структура потока, определяемая граничными условиями, взаимосвязаны.

В работе [18] представлены результаты экспериментального и теоретического исследования турбулентной конвекции в замкнутых полостях. Экспериментальные исследования термогравитационной конвекции в кубической полости выполнены для различных чисел Релея и различных условий подогрева. Исследованы устойчивость равновесия, переходы к стационарному, периодическому, стохастическому и развитому турбулентному режимам

конвекции. Прослежена эволюция осредненного температурного поля, крупномасштабных мод и пространственных спектров температурных пульсаций с ростом числа Релея. Измерены пространственно-временные спектры стохастических колебаний.

В экспериментах широко применялись новые модификации интегральных оптических методов. Представлены результаты экспериментальной проверки предложенных методов на тестовых задачах.

Результаты экспериментов используются для построения иерархической модели турбулентности, в основу которой положено смешанное координатно-спектральное представление гидродинамических полей.

Процессы конвективного теплообмена, представляющие практический интерес, происходят в условиях турбулентного движения сплошной среды. Существующие в настоящее время модели и методы расчета турбулентного теплообмена применимы обычно к весьма узкому классу течений, обладающему основными особенностями уже изученных классов течений, на базе которых они и созданы. Построение моделей, которые бы давали надежные результаты в неизученных ранее условиях, является первоочередной задачей, решение которой может существенно повлиять на возможности резкого повышения мощности промышленных аппаратов, использующих явление турбулентного теплообмена.

Целью работы [19] является комплексное исследование винтового течения жидкости в тороидальном канале и детальное исследование процесса образования крупномасштабного спирального вихря от локализованного источника тепла во вращающемся слое жидкости. Исследование винтового течения в торе является необходимым этапом по подготовке пермского лабораторного эксперимента по реализации нестационарного МГД-динамо в тороидальном канале. Для реализации динамо эксперимента, требующего больших затрат мощности и больших объемов жидкого металла, необходимо исследовать возможность создания винтового потока на водной модели, в замкнутом тороидальном канале, временную зависимость различных компонент скорости течения, определить осредненные профили скорости, найти оптимальные режимы торможения канала. Исследование спирального вихря от локализованного источника тепла включает в себя изучение влияния на его эволюцию различных факторов, таких, как геометрия модели, неоднородный нагрев и мелкомасштабные спиральные вихри, а также измерения полей скорости с применением современных трассерных методов измерения скорости PIV (Particle Image Velocimetry).

В [20] представлена математическая модель нестационарного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме с локальными источниками тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних граней области решения. Проведен численный анализ режима термогравитационной конвекции для умеренных значений числа Грасгофа. Получены характерные поля температуры и скорости,

а также представлено сравнение полей искомых величин плоской и пространственной моделей по одному из типичных сечений области решения.

Проведен [21] экспериментальный и численный анализ ламинарных режимов сопряженной термогравитационной конвекции в замкнутом параллелепипеде с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии локального источника энергии в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой. Численные исследования выполнены с использованием пакета прикладных программ «Fluent». Показано, что экспериментальные данные и результаты численных расчетов достаточно хорошо согласуются.

В [22] исследуются обратные задачи и задачи управления для нестационарных уравнений тепловой конвекции, рассматриваемых при граничных условиях Дирихле для скорости и смешанных краевых условий для температуры. Указанные задачи формулируются как задачи условной минимизации функционалов качества, адекватно описывающих исходные постановки. Роль управления играет поток тепла на части границы области течения. С использованием методов оптимального управления выводится система оптимальности, представляющая собой необходимые условия экстремума первого порядка. Предлагается численный алгоритм решения рассматриваемых задач и проводится анализ результатов проведенных вычислительных экспериментов.

Экспериментально изучена структура закрученного течения в вихревой камере [23]. Измерены распределения азимутальной и осевой компонент скорости практически во всем объеме камеры и определены распределения функции тока этого стационарного вращательно-симметричного течения. Впервые построена картина линий тока течения в вихревой камере, и выявлены основные структурные элементы этого течения.

В экспериментах по исследованию горизонтальных конвективных валов в цилиндрической полости [24] было обнаружено, что процесс образования поперечных структур носит периодический характер. В связи с этим были внесены изменения в программу исследований и основные усилия были сконцентрированы на изучении формирования мелкомасштабных конвективных валов в неподвижном цилиндрическом слое жидкости с локализованным нагревом в центральной части. Подогрев в центральной области приводит к появлению крупномасштабной адвективной ячейки, занимающей весь объем рабочей полости. В области подогрева, вблизи дна кюветы, образуется температурный пограничный слой, в котором формируются вторичные структуры, форма которых зависит от нагрева. В широком диапазоне управляющих параметров вторичные течения представляют собой суперпозицию радиальных конвективных валов, направленных вдоль основного течения и поперечного возмущения, сносимого к центру. Формирование поперечных структур характеризуется частотой, значение которой определяется числом Рэлея.

Рассмотрена задача о движении вязкой жидкости, индуцируемом трансверсальным перемещением и вращением параллельных плоскостей, ограничивающих область течения [25]. Частные решения задачи найдены в рамках

класса точных решений уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью части компонент скорости от двух пространственных переменных. Такой подход позволил редуцировать полные уравнения гидродинамики к существенно переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных, в число которых включены законы относительного перемещения и вращения твердых границ. В результате анализа совместности полученной системы обнаружены три случая ее замыкания, два из которых соответствуют вращению плоскостей с одинаковыми (в общем случае переменными) угловыми скоростями, но с разными законами поперечного перемещения границ потока. Третий случай замыкания предполагает противовращение плоскостей с равными по абсолютной величине угловыми скоростями. Анализ этого случая показал его качественное сходство (в смысле картины перемещения и вращения скоростей) с исследованным ранее аналогичным осесимметричным режимом [26].

При моделировании природных и технологических процессов, связанных с описанием движений вязких несжимаемых жидкостей, возникают так называемые крупномасштабные течения [27]. Для таких течений вертикальный характерный масштаб пренебрежимо мал по сравнению с горизонтальными расстояниями. Для такого класса задач построено достаточно много точных решений [28], скорости которых зависят линейно от горизонтальных компонент с функциональными коэффициентами, а давление является квадратичной формой. Решения этих задач хорошо известны, поскольку они сводятся к линейным одномерным уравнениям, которые легко интегрируются. В работе [27] приводится обобщение классических слоистых течений для завихренных жидкостей. В этом случае конвективная производная в уравнениях движения жидкости тождественно не обращается в нуль.

Характерной особенностью турбулентной тепловой конвекции в замкнутом объеме является формирование крупномасштабных потоков, которые охватывают всю полость. Структура крупномасштабной циркуляции определяет эффективность потока тепла. Наибольшее количество информации о динамике и структуре крупномасштабной циркуляции получено для цилиндрических моделей, где крупномасштабная циркуляция представляет собой одновихревое течение, охватывающее всю полость со стороной и блуждающее в азимутальном направлении. В работе [29] экспериментально исследуется долговременное поведение крупномасштабной циркуляции в кубической полости. Экспериментальные исследования поведения крупномасштабной циркуляции в кубической полости показали, что ориентация крупномасштабного вихря меняется случайным образом. Было зафиксировано два вида движения. Первому типу движения соответствует крупномасштабный вихрь, локализованный вдоль одной из диагоналей полости, причем с течением времени крупномасштабный вихрь перебрасывался с одной диагонали на другую. Второму типу движения соответствует крупномасштабный вихрь, ориентированный вдоль плоскости широких граней.

В неоднородно нагретых слоях жидкости нередко возникает пограничный слой с неустойчивым распределением температуры. В этом пограничном слое возможно формирование вторичных структур в виде конвективных валов, оси которых могут быть направлены как вдоль основного потока, так и поперек. Интерес к таким течениям связан с их наблюдением в атмосферном пограничном слое и их влиянием на перенос импульса, тепла и влаги в пограничных слоях циклонов и ураганов [30].

Экспериментально вторичные структуры в виде продольных валов были обнаружены в пограничном слое над нагретой наклонной пластиной в случае вынужденной конвекции [31].

В [32] исследовалось образование спиральных структур, вызванных конвективной неустойчивостью в вынужденном течении в плоском горизонтальном канале.

В условиях свободной конвекции вторичные течения были исследованы в прямоугольной полости при наличии на дне ступенчатого перепада температур [33].

Следующим шагом в изучении таких структур является исследование влияния геометрии полости и нагревателя на вид и динамику возникающих вторичных течений. В цилиндрическом слое жидкости конвективные валы над локализованным источником тепла впервые наблюдались в [34], однако детального исследования этих структур не проводилось.

Предметом работы [35] стало изучение возникновения вторичных течений на экспериментальной установке с использованием современных систем измерений. В ходе проведенной работы показано наличие температурного пограничного слоя вблизи границы нагревателя. Исследовано влияние нагрева на форму и динамику, возникающих в пограничном слое вторичных структур.

В [36] экспериментально исследована турбулентная свободная конвекция жидкого натрия в прямой теплоизолированной трубе с торцевыми теплообменниками, обеспечивающими фиксированный перепад температуры. Представленные характеристики крупномасштабной циркуляции и турбулентных пульсаций температуры показывают, что конвективный теплоперенос определяется в основном скоростью крупномасштабной циркуляцией натрия.

Разработке эффективных экономичных методов моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости для проведения исследований нестационарных гидродинамических нагрузок на тела, совершающие произвольное движение, посвящена работа [37]. Предложенные алгоритмы расчета течений вязкой несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье – Стокса являются эффективными и экономичными инструментами проведения научных исследований отрывного обтекания произвольно движущихся тел, расчета нестационарных гидродинамических нагрузок на тела и нестационарного теплообмена. Полученные в работе выражения позволяют объединить уравнения движения тел с гидродинамическими уравнениями в единую систему, позволяющую расширить возможности решения сопряженных задач движения тел под действием гидродинамических сил.

Изучению конвективных течений вязких теплопроводных жидкостей всегда уделялось много внимания в связи с важностью этих процессов для приложений. В последнее время интенсивное развитие теории и численных экспериментов по конвекции связано с активным изучением космического пространства. Стало особенно интересным предсказать поведение некоторых жидкостей в слабых гравитационных полях, сравнить эти результаты с экспериментами, обнаружить влияние свободных или частично деформируемых границ на поведение жидкости. Потребностями современных технологий обусловлен интерес к конвективным явлениям в микромасштабах [38]. Если для газов свойство сжимаемости или способность легко изменять плотность под действием изменений давления или температуры является естественным, то для жидкостей оно выражено слабо. Вместе с тем, учет в том или ином виде слабой сжимаемости приводит к интересным результатам.

Предметом исследования работы [38] являются математические модели, используемые для описания естественной конвекции жидкости в условиях пониженной гравитации и в микромасштабах.

Уточнению математической модели конвективного движения вязкой теплопроводной жидкости с переменными теплофизическими коэффициентами посвящена работа [39]. На основе разработанного эффективного численного метода решения задач конвективного движения исследованы характеристики течения и температурное поле жидкости при неравномерном нагреве границы. При изучении особенностей конвекции применяются упрощения, которые не искажая физической сути явления, позволяют исследовать ее с помощью доступных методов. В частности, рассматривается приближение Обербека-Буссинеска.

В работе [40] освещены особенности динамики конвективных течений, вызванных действием силы тяжести и градиентов температуры, приведена математическая модель, описывающая их поведение, а также условие механического равновесия жидкости при нагреве, условия возникновения устойчивого и неустойчивого конвективных течений. Приведены законы подобия для свободной конвекции и теплопередачи. С учетом несжимаемости жидкости, а также при принятии еще ряда допущений, исходная система уравнений значительно упрощена. Соответствующие приближенные уравнения называют уравнениями конвекции в приближении Буссинеска.

Математическая модель конвекции жидкости рассматривается [41] в условиях слабой гравитации. Жидкость принимается слабо сжимаемой средой. На основе предложенной ранее математической модели конвекции слабо сжимаемой жидкости изучается нестационарное конвективное движение в вертикальной полосе, на твердых границах которой задается периодический по времени тепловой поток. Эта модель конвекции позволяет изучить задачу в условиях, когда граничный тепловой режим колеблется в противофазе. В работе выписываются точные решения для компонент скорости и температуры и численно выстраиваются траектории движения жидких частиц.

§3. Особенности аналитического и численного моделирования различных задач конвекции сплошных сред

Полную систему уравнений Навье – Стокса можно использовать для расчета сложных полей течений, для которых неприменимы уравнения пограничного слоя. В некоторых случаях только ее и можно применять. К сожалению, уравнения Навье – Стокса с трудом поддаются численному решению, поскольку это сопряжено с большими затратами машинного времени и памяти. Особенно это касается уравнений Навье – Стокса для сжимаемой сплошной среды, которые образуют смешанную систему эллиптически-параболических уравнений для стационарных течений и гиперболически-параболических уравнений для нестационарных течений [42].

Даже для расчета стационарных течений применяется зависящая от времени процедура решения, т.е. нестационарные уравнения Навье – Стокса интегрируются по времени до тех пор, пока не будет достигнуто установившееся решение. Поэтому, при расчете трехмерных течений с использованием уравнений Навье – Стокса для сжимаемой сплошной среды, фактически необходимо решать четырехмерную задачу.

Для целого ряда задач расчета течения вязкой сплошной среды нельзя получить точное решение при помощи упрощенных уравнений Навье – Стокса. В этих случаях необходимо решать полную систему уравнений Навье – Стокса. К сожалению, эта система уравнений очень сложна, и ее решение требует больших затрат машинного времени. Если среда несжимаема, то уравнения существенно упрощаются, и соответственно уменьшается время, необходимое для их решения.

Как уже говорилось, нестационарные уравнения Навье – Стокса для сжимаемой сплошной среды образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений относительно времени. Если в этих уравнениях опустить нестационарные члены, то полученная смешанная система будет гиперболически-эллиптического типа, решать которую трудно из-за несходства методов численного решения уравнений гиперболического и эллиптического типов. Поэтому, все удачные случаи решения системы уравнений Навье – Стокса для сжимаемой среды, связаны с нестационарной формой этой системы уравнений.

Для численного решения зависящих от времени систем уравнений Навье – Стокса для сжимаемой сплошной среды использовались как явные, так и неявные расчетные схемы. Почти все эти схемы имеют второй порядок точности по пространству и либо первый, либо второй по времени. Если требуется получить точную картину развития течения во времени, то порядок схемы по времени должен быть, по крайней мере, вторым. Если же представляет интерес только установившееся решение, то часто пользуются не только точными по времени схемами, так как выход на стационар можно получить за меньшее число шагов по времени. Ввиду большой дополнительной сложности имеется мало работ о применении схем третьего порядка (и выше) в расчетах уравнений Навье –Стокса для сжимаемой сплошной среды. Многие исследователи

полагают, что выбор схем второго порядка является оптимальным, поскольку большая точность требует существенно больших затрат машинного времени и ресурсов.

Большая обзорная статья [43] посвящена расчетам уравнений Навье – Стокса для сжимаемой жидкости, выполненным до 1976 г. В ней рассматриваются проблемы, связанные с вычислением вязких сжимаемых потоков на основе численного решения уравнений Навье – Стокса. Общее введение в уравнения Навье – Стокса и обсуждения их применения в аэродинамических задачах. Обсуждаются следующие аспекты численных методов: ограничение расчетной области; граничные условия на внешней границе; различные подходы в конечно-разностных методах и описание некоторых типичных схем; граничные условия на твердой стенке; ударные волны; и общие соображения по точности и вычислительных шагов. Отмеченные расчеты двумерных или трехмерных потоков представлены в виде таблицы с краткими указаниями по проблемам обработанных и используемых методов.

Применение схемы Мак-Кормака [44] к уравнениям Навье – Стокса для сжимаемой жидкости приводит к явной схеме второго порядка, как по пространству, так и по времени. В этом варианте схемы на шаге предиктор для аппроксимации всех пространственных производных используются разности вперед, а на шаге корректор – разности назад. Разности вперед и назад можно последовательно чередовать как на шагах предиктор–корректор, так и при аппроксимации производных по трем пространственным координатам. Это устраняет рассогласование, обусловленное дискретизацией односторонними разностями.

Численные расчеты уравнений Навье – Стокса для сжимаемой жидкости иногда «разваливаются» из-за осцилляций, которые являются следствием неадекватного измельчения сетки в областях больших градиентов. Во многих случаях измельчение сетки в этих областях лишено практического смысла, особенно если они сильно удалены от рассматриваемой области. Для таких ситуаций Мак-Кормак и Болдуин [45–48] разработали сглаживающую схему четвертого порядка, в рамках которой в уравнения Навье – Стокса добавляется член с искусственной вязкостью. Величина этого сглаживающего члена очень мала везде, кроме областей резких осцилляций давления, в которых аппроксимация без сглаживания приводит к ошибочным результатам.

Одним из первых для решения системы уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости, записанных относительно переменных u, v, w, p, был предложен метод искусственной сжимаемости [49]. В этом методе в уравнение неразрывности включен член с искусственной сжимаемостью, который обращается в нуль, когда решение выходит на стационарный режим во времени. При этом уравнения Навье – Стокса образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, которая решается обычным методом установления.

В монографии [50] систематизированы полученные в последние годы результаты изучения процессов конвекции, тепло- и массообмена на основе двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Рассмотрены методы численного решения уравнений Навье – Стокса и ускорения расчетов с помощью конвейерной обработки, методы графической и статистической обработки результатов расчетов. Изложены математические модели и результаты исследований конвекции, тепло- и массообмена для технических, технологических приложений, в геофизической гидродинамике. Приведены сведения о специальном математическом обеспечении, разработанном для решения данного класса задач.

В [51] проводится поиск границ устойчивости и анализ геометрических факторов, определяющих вид вторичных структур ламинарных естественно-конвективных течений после потери устойчивости в наклонных каналах прямоугольного сечения. Исследование проводится численно на модели вязкой несжимаемой жидкости, движение которой описывается системой уравнений Навье – Стокса и уравнения теплопроводности в приближении Буссинеска. Для получения решения используется конечно-разностный метод, а для анализа устойчивости в линейном приближении – псевдоспектральный метод.

Проведено прямое численное исследование течений несжимаемой вязкой жидкости внутри тороидального канала, вращающегося вокруг внешней оси симметрии [52]. Разобраны случаи установившегося и развивающегося течений при различных видах воздействий, вызывающих движение вдоль канала. Особое внимание уделено ранее игнорировавшемуся случаю толстого тора. Проведено сравнение с аналитическими методами и данными экспериментов. Сравнение с известной аппроксимацией Дина выявило области параметров, в которых для задания течения недостаточно одного параметра. Приведены карты установившихся режимов течения. В нестационарном случае обнаружено временное нарушение симметрии течения относительно центральной плоскости.

Стационарные течения в двухслойной системе «жидкость-газ» с испарением на термокапиллярной границе раздела изучаются с помощью точных решений уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска [53]. Учитываются эффекты Соре и Дюфура в верхнем газопаровом слое. Точные решения имеют такой вид, когда только продольная компонента скорости отлична от нуля и зависит от поперечной координаты. Распределение температуры, давление и концентрация пара в слое газа линейно зависят от продольной координаты и имеют зависящую от поперечной координаты составляющую. Данные решения могут быть названы обобщением известного решения о конвекции в горизонтальном слое со свободной границей [54]. Осуществляется постановка задачи для моделирования двухслойных конвективных течений с учетом испарения в случае заданного расхода газа. При этом соотношение для концентрации насыщенного пара на свобрдной границе определяется как следствие уравнений Клапейрона – Клаузиуса и Менделеева – Клапейрона. Особенности течений исследованы для двух типов краевых

условий для концентрации пара на верхней твердой границе: в случае нулевой концентрации пара и в случае нулевого потока пара. Проводится сравнение топологии и характеристик течений для жидкости с нормальным и аномальным термокапиллярным эффектом. На основе точных решений исследуется влияние продольных градиентов температуры, заданных на границах, величины расхода газа, высоты жидкого слоя на структуру течений и распределение температуры, а также на процесс диффузии пара и интенсивность испарения на границе раздела. Представлены примеры профилей скорости, температуры и концентрации пара.

В [55] численно исследуется задача о течениях насыщенной газом жидкости, заполняющей сферический слой со свободными границами и содержащей внутри себя газовый пузырек. Математическая модель включает в себя уравнения Навье – Стокса, переноса тепла и диффузии пассивной примеси газа, а также условия на свободных границах: кинематические и динамические условия, закон Генри, связывающий концентрацию газа на границе области с давлением вне этой области, соотношение, определяющее баланс энергии, и условие непрерывности температуры на внутренней свободной границе. Внутри пузырька газа считается выполненным уравнение Менделеева – Клапейрона, а на внешней свободной границе определен теплообмен с внешней средой с помощью условий первого или третьего рода. При этом полагается, что коэффициенты переноса являются функциями температуры. Проведен параметрический анализ задачи, построен и протестирован численный алгоритм, включающий в себя метод прогонки с параметром, роль которого играет неизвестное значение температуры на внутренней границе в каждый момент времени. Исследовано, что помимо диффузионных факторов значительное влияние на динамику сферического слоя и процессы тепло- и массопереноса в нем оказывает внешний тепловой режим. Найдены качественные и количественные различия в характеристиках течений в случае, когда на внешней свободной границе заданы условия для температуры первого или третьего рода.

С помощью прямого численного моделирования в [56] исследовано течение несжимаемой жидкости во вращающемся тороидальном канале, инициированное различными силами. Показано, что интегральные характеристики зависят не только от ранее рассматривавшихся параметров. Рассмотрен вопрос нарушения симметрии при формировании стационарного течения. Найдены параметры, при которых на вторичном течении образуется пара добавочных вихрей.

В [57] изучено поведение чистой воды в квадратной ячейке. Проанализированы стационарные решения и их количество в зависимости от числа Грасгофа при постоянном числе Прандтля, зависимость тепловых потоков на верхней и нижней границах от времени и эволюционное развитие конвективного движения в зависимости от начальных условий.

Численно исследовалась смешанная конвекция воды в квадратной полости с движущейся верхней границей, вблизи точки инверсии плотности [58].

Изучалось влияние скорости движения верхней границы и экстремума плотности воды на структуру конвективных течений в стационарном состоянии и на характеристики теплообмена. В работе представлены графики и рисунки, иллюстрирующие эволюцию стационарных решений при изменении числа Рейнольдса. Показано, что в данной задаче в соответствующем диапазоне чисел Рейнольдса существуют два различных типа стационарных решений.

В [59] представлены результаты численного исследования влияния инверсии плотности холодной воды на течение и теплообмен в горизонтальном плоскопараллельном канале с изотермическими верхней и нижней стенками. Расчеты проводились при варьировании температуры стенок канала при сохранении разности их температур.

Проведен численный анализ задачи гидродинамики и теплообмена при стационарном, полностью развитом течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе с внутренними кольцевыми ребрами [60]. Построена численная модель для расчета ламинарных течений с постоянной мощностью, затрачиваемой на прокачку. Приведены результаты исследования высоты ребер и их числа на гидравлические характеристики, и теплообмен в канале.

Численно исследована [61] нестационарная естественная конвекция в квадратной полости, расположенной под углом к горизонту. Одна из сторон полости поддерживалась при постоянной температуре, другая при изменяющейся по синусоидальному закону температуре. Две другие стороны полости полагались адиабатическими. Численные решения получены в широком диапазоне изменения частоты колебаний температуры одной из стенок квадратной полости.

Исследуется [62] свободный конвективный перенос тепла в квадратной полости при периодическом изменении температуры одной из стенок.

Течения нескольких несмешивающихся жидкостей, расслоенные или разделенные течения, возникают в нефтегазовых скважинах и трубопроводах при транспортировке различных газожидкостных смесей. Практическое применение таких течений определяет актуальность решения подобных задач и вызывает большой интерес исследователей. Численное решение соответствующих дифференциальных уравнений является одним из основных методов изучения и анализа задач этого класса. В [63] численно исследована задача разделенного течения двух вязких несжимаемых жидкостей в плоскопараллельном горизонтальном и слабо наклоненном к горизонту канале. Разработан алгоритм определения границы раздела между жидкостями. Для системы вода-нефть во всех вариантах расчетов найдены и проанализированы поле течения, давление, граница раздела жидкостей, трение на стенках канала, профили скоростей в сечениях канала. Среди работ, близких к рассматриваемой проблеме, можно указать работы [64–67].

В работе [68] на основе метода контрольного объема и модифицированного алгоритма в полной постановке численно решена нестационарная задача о нагреве совершенного газа в плоском ограниченном слое.

В настоящее время возрастает интерес к термоакустическим волнам. Это обусловлено возможностью их использования в качестве одного из механизмов переноса энергии. Краткий обзор наиболее значимых работ в области термоакустической конвекции можно найти в работах [69, 70]. В [71] проведено исследование влияния термоакустических волн на теплоперенос в слое сжимаемой среды. В результате проведенного исследования установлено, что решение задачи не зависит от вязкости газа и определяется тремя критериями подобия. Термоакустические волны могут интенсифицировать процесс теплопереноса и ускорить выход системы на предельную конфигурацию.

В [72] рассмотрены стационарные естественно-конвективные течения жидкости в квадрате. В результате численного моделирования обнаружены 12 стационарных решений задачи. Изучено поведение течений при изменении числа Грасгофа. Рассмотрена эволюция течений и приведены зависимости безразмерных тепловых потоков от числа Грасгофа.

Численно исследована стационарная естественная конвекция в наклонной квадратной полости с двумя изотермическими и двумя адиабатическими стенками [73]. Получены явления гистерезиса и изучены стационарные течения в зависимости от угла наклона при разных числах Грасгофа. Установлено явление гистерезиса для аналогичной трехмерной постановки задачи.

В работе [74] численно исследовалось влияние эффектов сжимаемости на распределение температуры, давления, скорости и плотности в плоском слое совершенного вязкого газа при заданных периодических термических граничных условиях. Возникновение термоакустических волн существенно интенсифицирует нагрев области в среднем за период при воздействии температурных волн с частотой равной собственной частоте системы и при её кратном увеличении, при уменьшении частоты происходит охлаждение области в среднем за период.

Разработана математическая модель вибрационного движения области, заполненной вязким газом [75]. Проведены расчеты задачи в одномерной постановке. Получены максимальные значения температуры и давления газа у границ области в зависимости от частоты вибрации.

Проведено численное исследование процессов тепломассообмена в области, подверженной вибрационному воздействию [76]. Описано влияние частоты вибрации на поведение характеристик газа, находящегося внутри области. Задача решалась в одномерной постановке.

В [77] проведено численное исследование стабилизированного течения жидкости в плоском канале с вязкостью, зависящей от температуры.

В [78] численно исследуется влияние вибрации на поведение совершенного вязкого газа внутри прямоугольной полости. Сравниваются процессы тепломассообмена газа в области при изотермических и адиабатических граничных условиях. Задача решается в одномерной постановке.

В работе [79] приведены результаты численного решения одномерной задачи о стабилизированном течении несжимаемой жидкости в плоском канале. Вязкость жидкости экспоненциально зависит от температуры.

В работе [80] численно исследован процесс переноса тепла в наклонной полости, заполненной жидкостью и находящейся в поле силы тяжести. Температура на боковых вертикальных сторонах изменялась определенным образом. Остальные стенки предполагались адиабатическими.

В [81] проведено численное исследование естественной конвекции и фазовых переходов в прямоугольных и цилиндрических полостях и создание пакета программ для моделирования данных процессов.

Методы, успешно применяемые не только для решения задач свободной конвекции, но и решения задач гидродинамики изотермической вязкой несжимаемой жидкости изложены в книге [82]. Детально описаны возможности численных методов применительно к различным задачам конвекции.

Ретроспективная задача, состоящая в восстановлении неизвестного начального состояния высоковязкой несжимаемой жидкости по ее известному финальному состоянию, решается в [83]. Модель динамики жидкости в приближении Буссинеска описывается уравнениями Стокса, несжимаемости и теплового баланса с соответствующими начальными и граничными условиями. Для решения задачи в обратном направлении времени разработан новый итерационный подход, позволяющий свести неустойчивую исходную задачу к серии устойчивых задач.

Численному исследованию естественных конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, границы которого могут вращаться под действием сил трения со стороны жидкости, посвящена работа [84]. Рассматриваются особенности приближения Буссинеска в инерциальной и в равномерно вращающейся системах отсчета, и устанавливается связь между этими моделями. Обосновывается выбор инерциальной системы отсчета. Описывается метод моделирования граничных условий, учитывающий возможность вращения обеих границ слоя под действием сил вязкого трения.

Проведен анализ результатов вычислительных экспериментов по моделированию свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферических объемах [85]. Математическая модель такой физической картины представляется уравнением Навье – Стокса в формулировке Обербека – Буссинеска с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Проведено [86] математическое моделирование нестационарных режимов естественной конвекции в вертикальной цилиндрической емкости с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии локального источника энергии в основании области в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой. Процесс теплопереноса описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в приближении Буссинеска в безразмерных переменных «функция тока – вектор завихренности скорости – температура» в цилиндрических координатах.

Подводя итог краткому обзору литературных источников и публикаций по математическому и численному моделированию конвективных течений сплошной среды, следует сделать несколько замечаний и выводов.

Несмотря на достаточно большое количество публикаций, обилие экспериментальных исследований, различных подходов в выборе математических моделей и способов их численной реализации, возможности адекватного описания и практического применения конвективных течений сплошной среды далеки от завершения.

Прежде всего, для описания устойчивых конвективных течений сплошной среды часто используются стационарные модели, в которых отсутствует зависимость параметров движущейся среды от времени. С точки зрения математического и численного моделирования такой подход значительно упрощает процесс описания конвективных течений.

Кроме того, в большинстве публикаций рассматривается описание конвективных течений в одномерном или двумерном случае, и лишь в некоторых работах предпринимается попытка моделирования и описания трехмерных течений сплошной среды в замкнутых объемах.

Широко распространенным является выбор математической модели, использующей уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска для несжимаемой или слабо сжимаемой сплошной среды. Такой подход частично оправдан с точки зрения упрощения математического и численного моделирования конвективного течения жидкости, но не является адекватным при описании подобных течений для газа.

Проблемой является и последовательный учет диссипативных свойств движущейся сплошной среды – вязкости и теплопроводности. Наличие диссипативной функции в полной системе уравнений Навье – Стокса резко усложняет ее аналитическое и численное решение. Поэтому часто прибегают к введению в рассмотрение искусственной вязкости, искусственной сжимаемости.

Поэтому встает задача преодоления указанных выше трудностей при описании нестационарного, трехмерного, свободного конвективного движения сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды под действием силы тяжести. Тем более что в последнее время были проведены во многом успешные исследования сложных нестационарных трехмерных течений вязкого, сжимаемого, теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках [87–115]. В основе этих исследований лежит аналитическое и численное решение полной системы уравнений Навье – Стокса в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

Глава II. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Для описания сложных конвективных течений используется математическая модель сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды, основанная на численном решении полной системы уравнений Навье – Стокса [116]. Эта модель наиболее адекватно описывает физические процессы в конвективных течениях, поскольку учитывает диссипативные свойства движущейся сплошной среды – вязкости и теплопроводности.

Теоретические исследования, проведенные в последние годы [89–92, 96], были посвящены изучению течения газа как сплошной среды в разных частях восходящего закрученного потока. В этих работах кроме модели, основанной на решении системы уравнений газовой динамики, иногда использовалась и модель полной системы уравнений Навье – Стокса. С работ [97–99, 103] начался новый цикл исследований сложных течений газа, предполагающих математическое моделирование и численные расчеты трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в целом. Исследовались сложные течения газа в восходящих закрученных потоках, инициированных нагревом подстилающей поверхности и вертикальным продувом при учете действия сил тяжести и Кориолиса. В данном пособии для исследования начальной стадии свободных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа, возникающих при локальном нагреве подстилающей поверхности, предлагается использование модели, основанной на решении полной системы уравнений Навье – Стокса без учета действия силы Кориолиса.

Целью учебного пособия является описание применения математического моделирования и численных расчетов всех газодинамических и термодинамических характеристик в начальной стадии формирования конвективного движения сжимаемого вязкого теплопроводного газа, вызванного локальным прогревом различной интенсивности и конфигурации нижней поверхности расчетной области.

§4. Определение начальных условий для полной системы уравнений Навье – Стокса

В данном учебном пособии математически и численно моделируются два конкретных физических процесса:

1) возникновение свободной конвекции в атмосфере Земли при локальном круговом нагреве ее поверхности;

2) возникновение свободного конвективного течения газа в замкнутой теплоизолированной емкости при локальном кольцевом нагреве ее нижней поверхности.

Возникновение свободной конвекции в атмосфере Земли при локальном круговом нагреве ее поверхности

Пусть над поверхностью Земли в поле силы тяжести находится в покое атмосферный воздух (рис. 4.1). С некоторого момента времени $t > 0$ локальный участок поверхности Земли начинает нагреваться за счет солнечной энергии. Прилегающий к области нагрева воздух начинает двигаться вверх. Такие восходящие потоки воздуха согласно наблюдениям бывают очень мощными со скоростями в несколько десятков метров в секунду. Поскольку воздух является вязкой сжимаемой сплошной средой, то восходящий поток инициирует движение воздуха в окружающем пространстве. Другими словами под действием силы тяжести за счет градиента температуры возникает свободная конвекция атмосферного воздуха. Математическое и численное моделирование возникающих сложных конвективных течений воздуха над нагревающейся областью поверхности Земли и является одной из задач данного учебного пособия.

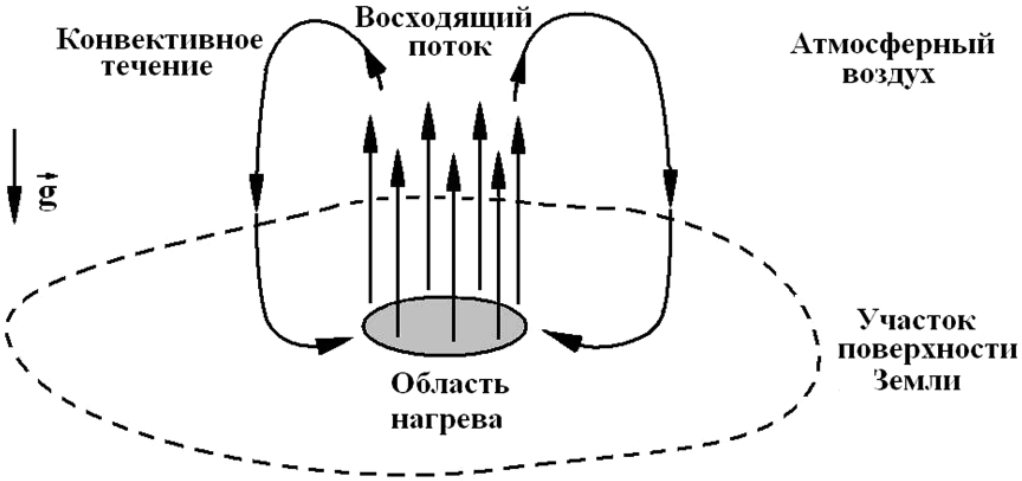


Рис. 4.1. Схема конвективного течения атмосферного воздуха

Возникновение свободного конвективного течения газа в замкнутой теплоизолированной емкости при локальном кольцевом нагреве ее нижней поверхности

Пусть на поверхности Земли в поле силы тяжести находится замкнутый кубической формы контейнер с находящимся в нем в покое атмосферным воздухом (рис. 4.2). Начиная с некоторого момента времени $t > 0$ локальный участок дна этого контейнера, начинает нагреваться с помощью нагревателя кольцевой формы. При этом в замкнутом контейнере под действием силы тяжести за счет градиента температуры возникает свободная конвекция воздуха. Математическое и численное моделирование возникновения сложных конвективных течений воздуха в замкнутой теплоизолированной емкости при локальном кольцевом нагреве ее нижней поверхности является второй задачей, описанной в данном учебном пособии.

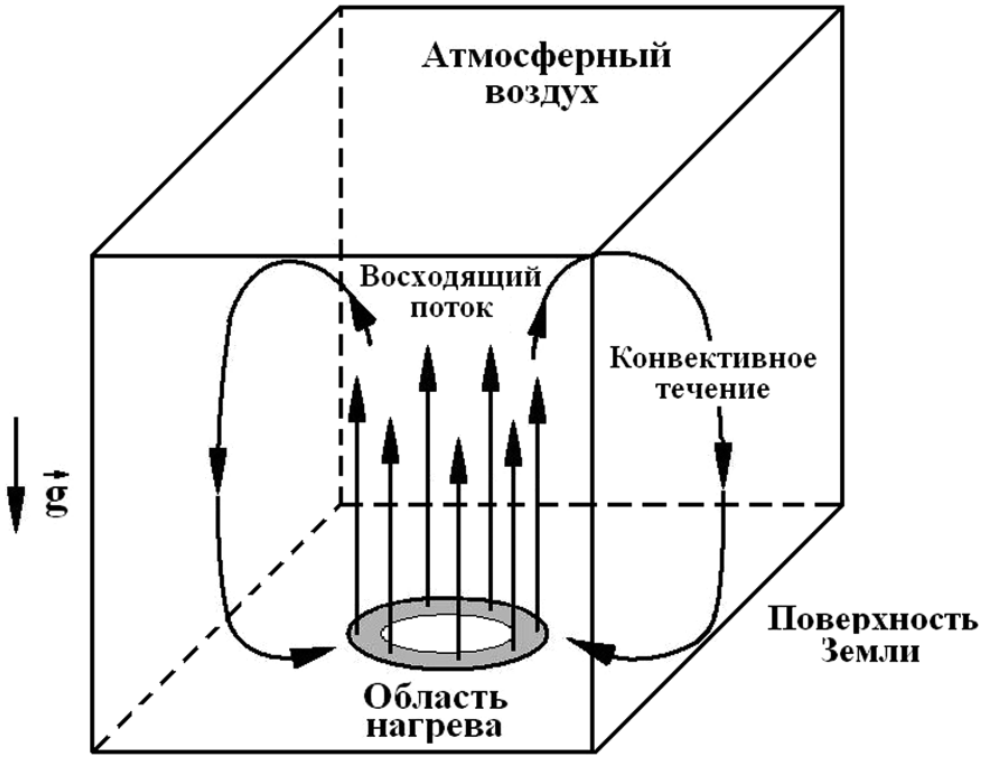


Рис. 4.2. Схема конвективного течения воздуха в замкнутой емкости

Поскольку в указанных двух задачах рассматривается возникновение конвективного течения газа при локальном нагреве нижней поверхности, то для его описания и моделирования используются законы газовой динамики. Именно поэтому основной математической моделью исследования таких течений может быть выбрана полная система уравнений Навье – Стокса.

Полная система уравнений Навье – Стокса, записанная в безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести в векторной форме имеет следующий вид [117]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \dfrac{T}{\gamma\rho}\nabla\rho + \dfrac{1}{\gamma}\nabla T = \mathbf{g} + \dfrac{\mu_0}{\rho}\left[\dfrac{1}{4}\nabla(\mathrm{div}\ \mathbf{V}) + \dfrac{3}{4}\Delta\mathbf{V}\right], \\ T_t + \mathbf{V}\cdot\nabla T + (\gamma-1)T\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \dfrac{\kappa_0}{\rho}\Delta T + \dfrac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\Big\{\Big[(u_x - v_y)^2 + \\ +(u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2\Big] + \dfrac{3}{2}\Big[(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2\Big]\Big\}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где t – время; x, y, z – декартовы координаты; ρ – плотность газа; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости с проекциями на соответствующие декартовы оси; T – температура; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения силы тяжести; ∇ и div – операторы градиента и дивергенции по декартовым пространственным переменным. Система (4.1) в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде.

В системе (4.1) значения безразмерных положительных констант μ_0 и κ_0 – коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие:

$$\mu_0 = \frac{4}{3}\frac{\mu_*}{\rho_{00}u_{00}x_{00}}; \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}x_{00}}, \tag{4.2}$$

константы μ_* и κ_* задают размерные значения этих коэффициентов, а масштабные значения удельной теплоемкости при постоянном объеме, плотности, скорости и расстояния соответственно – c_{V0}, ρ_{00}, u_{00}, x_{00}. При исследовании течений вязкого теплопроводного газа вводятся числа Рейнольдса и Прандтля:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{00}u_{00}x_{00}}{\mu_*}; \quad \mathrm{Pr} = \frac{c_{v0}\,\gamma\mu_*}{\kappa_*}. \tag{4.3}$$

Тогда $\mu_0 = 4/(3\mathrm{Re})$, $\mathrm{Pr} = 3\gamma\mu_0/(4\kappa_0)$. Для воздуха обычно полагают Pr = 0,72, а показатель политропы $\gamma = 1{,}4$ – и тогда $\kappa_0 \approx 1{,}46\mu_0$. Таким образом, в расчетах безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности имеют значения $\mu_0 = 0{,}001$; $\kappa_0 \approx 1{,}46\mu_0$.

В системе (4.1) стандартным образом введены безразмерные переменные

$$f = \frac{f_*}{f_{00}}, \tag{4.4}$$

где f_* – размерная переменная; f_{00} – ее масштабное значение. При заданных масштабных значениях расстояния x_{00}, плотности ρ_{00} и температуры T_{00} масштабные значения времени t_{00} и скорости u_{00} связаны соотношением: $u_{00} = x_{00}/t_{00}$. В качестве масштаба скорости берется

$$u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3}\cdot 10^3 \text{ м/с} \tag{4.5}$$

значение скорости звука в воздухе при стандартных условиях [118],

$$\rho_{00} = 1{,}2928 \text{ кг/м}^3;\ T_{00} = 288\,°\mathrm{K} = 15\,°\mathrm{C}. \tag{4.6}$$

Безразмерное значение константы g задается следующим образом:

$$g = g_*\frac{t_{00}}{c_{00}}; \quad g_* = 9{,}8 \text{ м/с}^2. \tag{4.7}$$

Если, например, в качестве масштаба расстояния при введении безразмерных переменных взята величина $x_{00} = 10^4$ м, то масштабное значение времени t_{00} будет равно тридцати секундам и получится следующее безразмерное значение константы $g = 0{,}882$. Если, не меняя масштаба скорости, увеличить (уменьшить) масштаб расстояния в заданное число раз, то значения констант t_{00} и g также увеличатся (уменьшатся) в такое же число раз.

Уравнения состояния идеального газа, задающие размерные значения давления p и внутренней энергии e такие [118]:

$$p_* = R\rho_*T_*; \quad e_* = c_{V0}T_*; \quad R,\ c_{V0} = \mathrm{const} > 0, \tag{4.8}$$

и тогда $\gamma = 1 + R/c_{V0}$, где R – универсальная газовая постоянная. При указанном выше способе введения безразмерных переменных уравнения состояния (4.8) переходят в следующие уравнения:

$$p = \rho T; \quad e = T. \tag{4.9}$$

Система (4.1) имеет смешанный тип: первое уравнение – уравнение неразрывности (дифференциальная форма закона сохранения массы) – образует гиперболическую часть системы, так как определяет в течениях сжимаемой теплопроводной вязкой сплошной среды наличие слабого разрыва на контактной поверхности [116, 117]; второе и третье уравнения – уравнения движения и энергии (дифференциальные формы законов сохранения импульса и энергии соответственно) – составляют параболическую часть системы, так как содержат вторые производные скорости и температуры по пространственной переменной.

Не смотря на то, что полная система уравнений Навье – Стокса сформулирована и записана давно, выбор ее в виде (1) в качестве основной математической модели для описания конвективных течений газа, как сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды, несет в себе значительный элемент новизны. Это связано с большими вычислительными сложностями при численном построении решений этой системы из-за наличия в ней дополнительных слагаемых, описывающих диссипативные свойства. Поэтому публикаций с результатами расчетов нестационарных и трехмерных конвективных течений в данной математической модели крайне мало.

Рассмотрение модели, основанной на решении полной системы уравнений Навье – Стокса, а не системы уравнений газовой динамики при описании конвективных течений сплошной среды оправдано по следующим соображениям [96]. Использование системы уравнений газовой динамики [89–92, 96] для моделирования течений газа без учета физических эффектов вязкости и теплопроводности обосновано для определенных диапазонов изменения скорости и температуры. Однако, во многих случаях при использовании системы уравнений газовой динамики либо в угловых точках расчетной области, либо при возникновении в течении больших значений производных искомых функций по пространственным переменным возникают нефизические осцилляции, получившие у вычислителей название «пилы». Для борьбы с этим явлением часто в разностные схемы вносят дополнительные слагаемые или вычислительные приемы, которые сглаживают, или даже уничтожают «пилы». С точки зрения уравнений с частными производными добавление этих слагаемых или использование специальных приемов равносильно тому, что либо к системе приписываются диссипативные слагаемые, либо неявно вводится учет диссипативных процессов. Эти приемы обычно называются введением искусственной вязкости, поскольку они не несут явного физического смысла.

Для преодоления вычислительных эффектов типа «пилы» предлагается включать в систему уравнений газовой динамики такие диссипативные члены, которые имеют четкий физический смысл. То есть, учитывать вязкость и теплопроводность так, чтобы для решений новой системы уравнений с частными производными продолжали выполняться фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии, а также законы термодинамики через вид уравнений состояния. И как самое простое средство для реализации такого подхода – использование полной системы уравнений Навье – Стокса (4.1), а не системы уравнений газовой динамики.

Полная система уравнений Навье – Стокса (4.1) в подробной (скалярной форме) записи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \dfrac{1}{\gamma}T_x = \\ = \dfrac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx} + \dfrac{3}{4}u_{yy} + \dfrac{3}{4}u_{zz} + \dfrac{1}{4}v_{xy} + \dfrac{1}{4}w_{xz}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \dfrac{1}{\gamma}T_y = \\ = \dfrac{\mu_0}{\rho}\left(\dfrac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \dfrac{3}{4}v_{zz} + \dfrac{1}{4}u_{xy} + \dfrac{1}{4}w_{yz}\right), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \dfrac{1}{\gamma}T_z = -g + \\ + \dfrac{\mu_0}{\rho}\left(\dfrac{3}{4}w_{xx} + \dfrac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \dfrac{1}{4}u_{xz} + \dfrac{1}{4}v_{yz}\right), \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\gamma - 1)T(u_x + v_y + w_z) = \\ = \dfrac{\kappa_0}{\rho}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \dfrac{\mu_0\,\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\left\{\left[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2\right] + \right. \\ \left. + \dfrac{3}{2}\left[(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2\right]\right\}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Функции

$$u = 0;\ v = 0;\ \ w = 0; \tag{4.11}$$

$$T_0(z) = 1 - kz;\ \ k = \frac{lx_{00}}{T_{00}};\ \ I = 0{,}0065\ \text{К/м};\ x_{00} = 10^4\ \text{м};\ T_{00} = 288\,°\text{К} \tag{4.12}$$

и

$$\rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1};\ \ \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0 \tag{4.13}$$

задают точное решение [94] системы (4.1) или (4.10) и могут быть использованы в качестве начальных условий при описании конвективных течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности. Функции (4.11)–(4.13) описывают начальное стационарное распределение покоящейся сплошной среды, в которой плотность и температура которой убывает с увеличением пространственной координаты z. Зависимости (4.12) и (4.13) только приближенно передают соответствующие зависимости, полученные для воздуха в результате физических наблюдений и экспериментов. Однако до высоты в десять километров, и особенно до высоты в пять километров, эти теоретические зависимости и качественно, и количественно хорошо передают данные натурных наблюдений за параметрами атмосферы Земли [94].

§5. Постановка краевых условий задачи возникновения и функционирования свободного теплового конвективного потока и их конечно-разностная аппроксимация

Ясно, что использование полной системы уравнений Навье – Стокса (4.1) добавляет трудностей (и математических, и вычислительных) по сравнению с использованием системы уравнений газовой динамики. Для этих двух систем по-разному задаются для компонент вектора скорости краевые условия на контактных поверхностях [95]. То есть на таких поверхностях, через которые сплошная среда не течет. Для системы уравнений газовой динамики на таких поверхностях предполагается равенство нулю нормальной составляющей к этой поверхности вектора скорости, а две остальные компоненты вектора скорости называются тангенциальными для данной поверхности (то есть лежат в касательной плоскости к ней) и их значения ничем не ограничиваются. Данное свойство называется «непротеканием». Для вязкой сплошной среды, течение которой описывается решениями полной системы уравнений Навье – Стокса (4.1), если по обе стороны от контактной поверхности заданы свои течения газа, то все компоненты векторов скорости на этой поверхности попарно совпадают – частицы среды этих двух течений на контактной поверхности как бы слипаются между собой из-за свойства вязкости. А если по вторую сторону от контактной поверхности течение среды не рассматривается, то на контактной поверхности равны нулю все три компоненты вектора скорости: и нормальная, и обе тангенциальные. Подобные условия обычно называются «условиями прилипания». Иногда область физического пространства, в которой рассматривается течение сплошной среды, ограничена. Однако не всегда границы такой области обусловлены физическими причинами. Часто положение границ определяется ограничениями на количество узлов разностной сетки, в которых численно строится решение. На таких поверхностях граничные условия задаются, исходя из условия непрерывности потока, далее называемые «условием непрерывности», или исходя из неизменности потока за пределами расчетной области – «условие симметрии». В первом

случае краевые условия для искомых функций задаются с помощью интерполяции (как правило, линейной) значений функций из внутренней части расчетной области на ее границу. Во втором случае обычно на границе предполагается равенство нулю производных искомых функций в направлении нормали к граничной поверхности. Последнее условие часто несет и физический смысл. Например, для температуры оно означает теплоизолированность граничной поверхности.

Следует заметить, что в некоторых задачах постановка для полной системы уравнений Навье – Стокса на конкретных границах областей таких условий, какие задаются в случае невязкой нетеплопроводной среды, приводит в итоге к построению решений, которые соответствуют и газодинамическому (гидродинамическому) смыслу задачи и для которых выполняются законы сохранения.

Поскольку решения полной системы уравнений строятся численно для различных как по масштабам, так и по геометрической конфигурации областей, то предполагается, что расчетная область есть прямоугольный параллелепипед с длинами сторон x^0, y^0 и z^0 вдоль осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Граничные условия для всех функций, характеризующих сплошную среду, выбираются исходя из следующих условий.

Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда: $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ – предлагается ставить «условие непрерывности» потока, если других, имеющих содержательный физический смысл, условий задача не имеет. Это «условие непрерывности» потока означает, что значения искомой функции на границу области сносятся линейной интерполяцией по нормали к данной граничной поверхности из внутренней части расчетной области.

Краевые условия для компонент вектора скорости газа предлагается брать или соответствующими «условиям прилипания», или соответствующими «условиям непротекания» для невязкой среды для нормальной составляющей вектора скорости. Две другие компоненты вектора скорости течения подчиняются «условиям симметрии». А именно:

$$f\big|_{\xi=0,\,\xi=\xi^0} = 0; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_{\xi=0,\,\xi=\xi^0} = 0, \tag{5.1}$$

где f – нормальная составляющая вектора скорости к поверхностям $\xi = 0$, $\xi = \xi^0$, а g – две другие составляющие вектора скорости, то есть тангенциальные по отношению к поверхностям $\xi = 0$, $\xi = \xi^0$.

Для температуры предлагается (если не оговорены какие-то другие конкретные условия) на всех гранях задавать условия теплоизоляции

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_{\xi=0,\,\xi=\xi^0} = 0. \tag{5.2}$$

А если, например, на плоскостях $z = 0$ и $z = z^0$ значения температуры будут заданы, то именно они и должны быть взяты за краевые условия:

$$T\big|_{z=0} = T_0(t, x, y); \quad T\big|_{z=z^0} = T_1(t, x, y). \tag{5.3}$$

Непосредственная разностная реализация предложенных краевых условий такова [95]. Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i\cdot\Delta x$, $y_j = j\cdot\Delta y$, $z_k = k\cdot\Delta z$, $0 \le i \le L$, $0 \le j \le M$, $0 \le k \le N$. При этом $\Delta x = x^0/L$, $\Delta y = y^0/M$, $\Delta z = z^0/N$ – разностные шаги по трем пространственным переменным.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ во всех точках прямоугольного параллелепипеда все искомые функции заданы

$$\vec{U}\big|_{t=0} = \vec{U}^0. \tag{5.4}$$

Затем с помощью явной разностной схемы

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \cdot F(\vec{U}^n); \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

вычисляются значения всех искомых функций во всех внутренних точках прямоугольного параллелепипеда. После этого значения искомых функций определяются во всех внутренних точках каждой из шести граней: $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$.

Если плотность на грани соответствует «условию непрерывности», то ее значения находятся с помощью линейной интерполяции по значениям плотности в двух точках, ближних по нормали к рассматриваемой грани (рис. 5.1 для граней $z = 0$, $z = z^0$):

$$\rho(A) = 2\rho(B) - \rho(C). \tag{5.6}$$

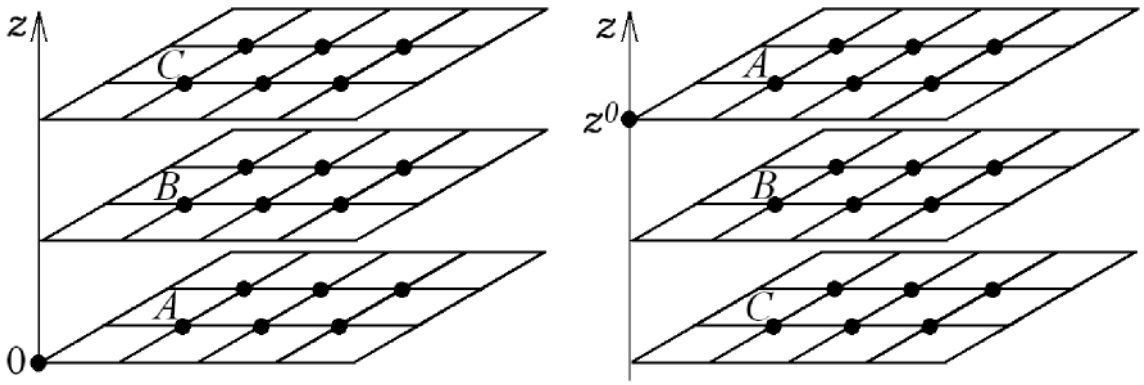


Рис. 5.1. Фрагменты расчетной сетки вблизи нижней поверхности $z = 0$ и верхней поверхности $z = z^0$

Граничные условия для компонент вектора скорости задаются следующим образом. Компонента скорости вдоль оси Ox во внутренних точках граней $x = 0$, $x = x^0$ принимается равной нулю. Во внутренних точках остальных четырех граней $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ значения функции u определяются «по симметрии», то есть определяются из условия, что в этих точках производная по нормали к данной грани равна нулю (рис. 5.1 для граней $z = 0$, $z = z^0$):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_A \approx \frac{3u(A) - 4u(B) + u(C)}{2h} = 0, \tag{5.7}$$

откуда получается такая расчетная формула

$$u(A) = \frac{1}{3}\left[4u(B) - u(C)\right]. \tag{5.8}$$

Компонента скорости вдоль оси Oy во внутренних точках граней $y = 0$, $y = y^0$ приравнивается нулю. Во внутренних точках остальных четырех граней $x = 0$, $x = x^0$, $z = 0$, $z = z^0$ значения функции v определяются «по симметрии», то есть определяются из условия, что в этих точках производная по нормали к данной грани равна нулю и, следовательно, получается такая расчетная формула (рис. 5.1 для граней $z = 0$, $z = z^0$):

$$v(A) = \frac{1}{3}\left[4v(B) - v(C)\right], \tag{5.9}$$

что аналогично предыдущей формуле.

Компонента скорости вдоль оси Oz во внутренних точках граней $z = 0$, $z = z^0$ полагается нулем. Во внутренних точках остальных четырех граней $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$ значения функции w определяются «по симметрии», то есть определяются из условия, что в этих точках производная по нормали к данной грани равна нулю и, следовательно, получается расчетная формула (рис. 5.2 для случаев граней $x = 0$, $x = x^0$):

$$w(A) = \frac{1}{3}\left[4w(B) - w(C)\right]. \tag{5.10}$$

Для температуры T во внутренних точках всех шести граней $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ значения определяются «по симметрии» (для температуры – это «условие теплоизоляции»), то есть определяются из условия, что в этих точках производная по нормали к данной грани равна нулю:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_A \approx \frac{3T(A) - 4T(B) + T(C)}{2h} = 0, \tag{5.11}$$

и получается такая расчетная формула (рис. 5.1 для граней $z = 0$, $z = z^0$):

$$T(A) = \frac{1}{3}\left[4T(B) - T(C)\right]. \tag{5.12}$$

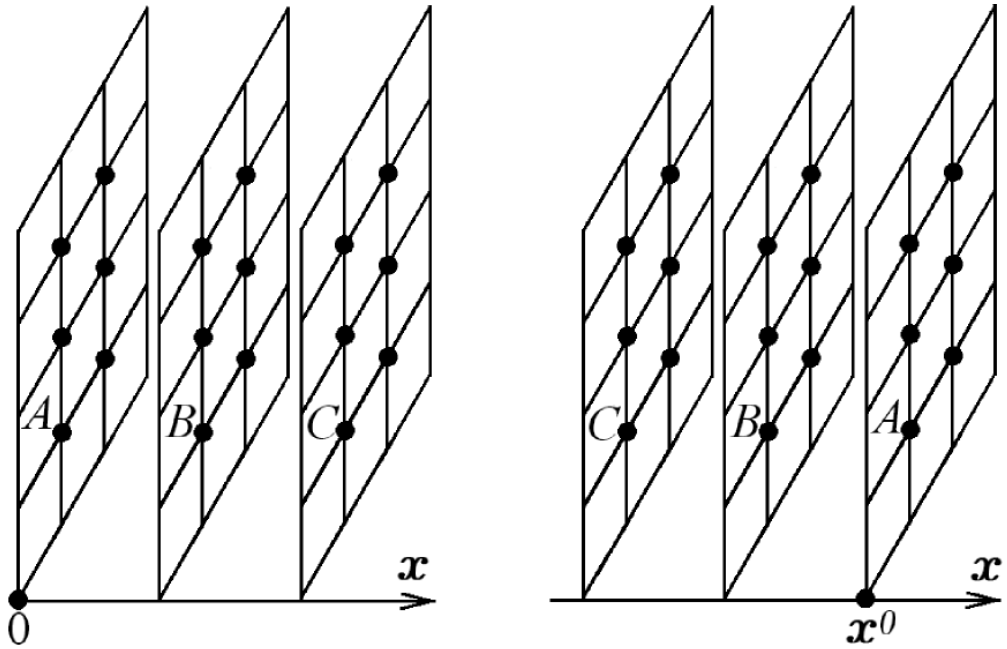


Рис. 5.2. Фрагменты расчетной сетки вблизи левой поверхности $x = 0$ и правой поверхности $x = x^0$

В случае расчетов при заданных на плоскостях $z = 0$, $z = z^0$ значениях температуры краевые условия считаются заданными, например:

$$T\big|_{z=0} = T_0\left(t^n, x_i, y_j\right); \quad T\big|_{z=z^0} = T_1\left(t^n, x_i, y_j\right), \tag{5.13}$$

где n – номер временного слоя и тогда $t = \Delta t \cdot n$.

Во внутренних точках остальных четырех граней $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$ значения температуры определяются «по симметрии» (для температуры – это условие «теплоизоляции»), то есть определяются из условия, что в этих точках производная по нормали к данной грани равна нулю и, следовательно, получается такая расчетная формула (рис. 5.2 для граней $x = 0$, $x = x^0$):

$$T(A) = \frac{1}{3}\left[4T(B) - T(C)\right]. \tag{5.14}$$

Значения всех искомых функций во внутренних точках всех двенадцати ребер прямоугольного параллелепипеда вычисляется следующим образом (рис. 5.3).

На двух гранях, образующих ребро, берутся по две точки (B_1C_1), (B_2C_2), расположенные на нормалях к ребру, проведенных через рассматриваемую точку A. Затем вдоль каждой из этих нормалей линейной интерполяцией определяются два своих промежуточных значения искомой вектор-функции в точке A:

$$\vec{U}_1(A) = 2\vec{U}(B_1) - \vec{U}(C_1); \quad \vec{U}_2(A) = 2\vec{U}(B_2) - \vec{U}(C_2). \tag{5.15}$$

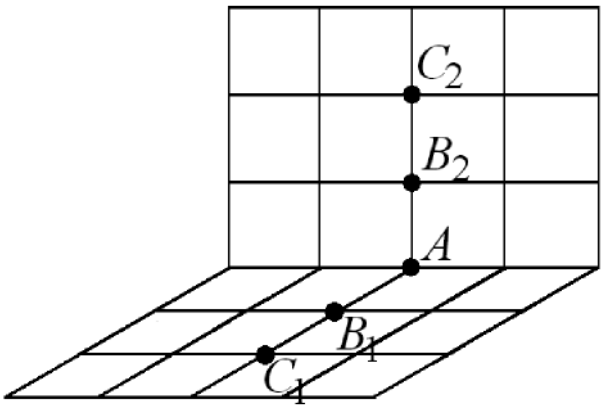


Рис. 5.3. Фрагмент расчетной сетки вблизи ребра

А затем значение на ребре в точке A берется как среднее арифметическое двух полученных промежуточных значений:

$$\vec{U}(A) = \frac{\vec{U}_1(A) + \vec{U}_2(A)}{2}. \tag{5.16}$$

В вершинах параллелепипеда значения вдоль каждого из трех ребер, приходящих в вершину, по двум ближайшим к вершине точкам линейной интерполяцией определяется свое промежуточное значение вдоль каждого ребра (рис. 5.4):

$$\vec{U}_1(A) = 2\vec{U}(B_1) - \vec{U}(C_1); \quad \vec{U}_2(A) = 2\vec{U}(B_2) - \vec{U}(C_2); \quad \vec{U}_3(A) = 2\vec{U}(B_3) - \vec{U}(C_3), \tag{5.17}$$

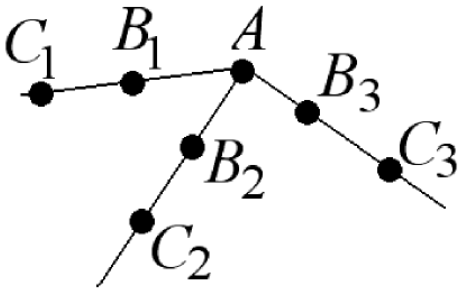


Рис. 5.4. Фрагмент расчетной сетки вблизи вершины

а затем значение в вершине берется как среднее арифметическое трех полученных значений:

$$\vec{U}(A) = \frac{\vec{U}_1(A) + \vec{U}_2(A) + \vec{U}_3(A)}{2}. \tag{5.18}$$

В задаче численного моделирования возникающих сложных конвективных течений воздуха над нагревающейся областью поверхности Земли предлагается рассматривать расчетную область в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.5). Его нижняя грань, совпадающая с поверхностью Земли, имеет форму квадрата со стороной, равной безразмерному единичному масштабному значению расстояния (размерное значение 100 км). Высота имеет

безразмерное значение 0,1 (размерное значение 10 км). Размеры расчетной области в данном случае приняты такими, чтобы максимально приблизить их к размерам возникающих конвективных потоков в атмосфере Земли при формировании, например, тропических циклонов.

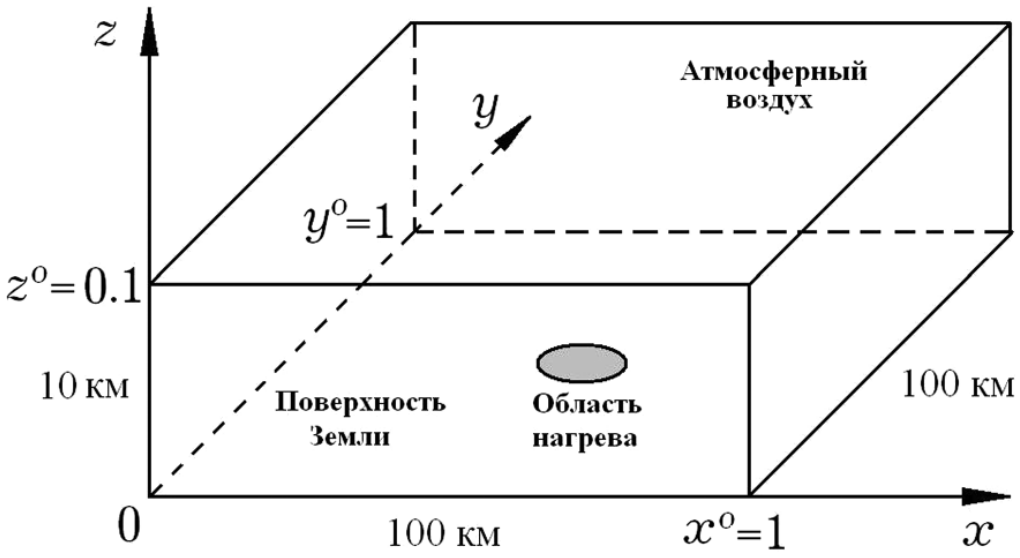


Рис. 5.5. Расчетная область в виде прямоугольного параллелепипеда

Начальные условия задаются с помощью соотношений (4.11)–(4.13). При этом набор из пяти указанных функций, являющихся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье – Стокса в бесконечном физическом полупространстве, используется в качестве начальных условий при численном моделировании конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа для ограниченного пространства выбранной расчетной области.

Исходя из физических соображений, для рассматриваемой задачи поставлены следующие конкретные граничные условия.

Для **плотности** на всех шести гранях расчетного параллелепипеда $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ ставится «условие непрерывности», при котором значения плотности на границу области сносятся линейной интерполяцией из внутренней части расчетной области. Это означает, что в процессе расчетов плотность воздуха может изменяться на всех гранях расчетного параллелепипеда в соответствии с установленными в полной системе уравнений Навье – Стокса закономерностями.

Нормальные составляющие вектора скорости на нижней и верхней грани $z = 0$, $z = z^0$ берутся равными нулю $w\big|_{z=0,\, z=z^0} = 0$, а для двух других **(тангенциальных) компонент вектора скорости** на нижней и верхней гранях $z = 0$, $z = z^0$ ставятся «условия непрерывности» и для этих граней (рис. 5.1) тангенциальные компоненты скорости газа рассчитывается по формулам

$$u(A) = 2u(B) - u(C); \quad v(A) = 2v(B) - v(C).$$

Это означает, что воздух не может пересекать нижнюю и верхнюю граничные поверхности расчетной области, но может двигаться вдоль них.

Все компоненты вектора скорости на четырех боковых гранях рассчитываются из «условия непрерывности». Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчетной области. Например, расчетные формулы для компонент скоростей для случаев граней $x = 0$, $x = x^0$ (рис. 5.2) имеют вид

$$u(A) = 2u(B) - u(C); \quad v(A) = 2v(B) - v(C); \quad w(A) = 2w(B) - w(C).$$

Для **температуры** на пяти гранях, кроме нижней, задаются «условия теплоизоляции», при которых производная от температуры в направлении нормали к соответствующей грани равна нулю. Например, для верхней грани $z = z^0$ (рис. 5.6)

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=z^0} = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_A \approx \frac{3T(A) - 4T(B) + T(C)}{2h} = 0,$$

откуда получается такая расчетная формула

$$T(A) = \frac{1}{3}\left[4T(B) - T(C)\right].$$

Другими словами, внутренняя часть расчетной области не обменивается теплом с окружающим пространством.

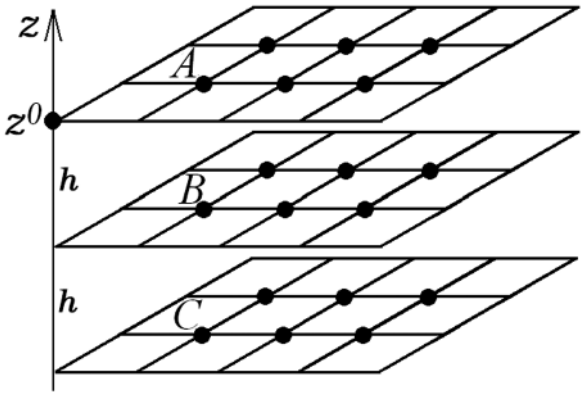


Рис. 5.6. Фрагмент расчетной сетки вблизи верхней поверхности $z = z^0$

Температуру на плоскости $z = 0$ предлагается задавать функцией

$$T\big|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1 + 0{,}125((1 - e^{-10t})\cos^6\left(\pi\sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2}\right),$$

моделирующей локальный круговой нагрев солнечной энергией поверхности Земли (рис. 5.7). В этой формуле фоновое значение температуры равно масштабной единице (размерное значение 288 °К = 15 °С), коэффициент 0,125 (размерное значение 36°) равен превышению максимальной температуры нагрева над фоновой температурой и задается в качестве входного значения в разных вариантах расчета. Множитель $(1 - e^{-10t})$ обеспечивает плавное нарастание температуры нагрева от фонового до максимального значения. Таким образом, максимум нагрева на рис. 5.7 соответствует температуре 51 °С.

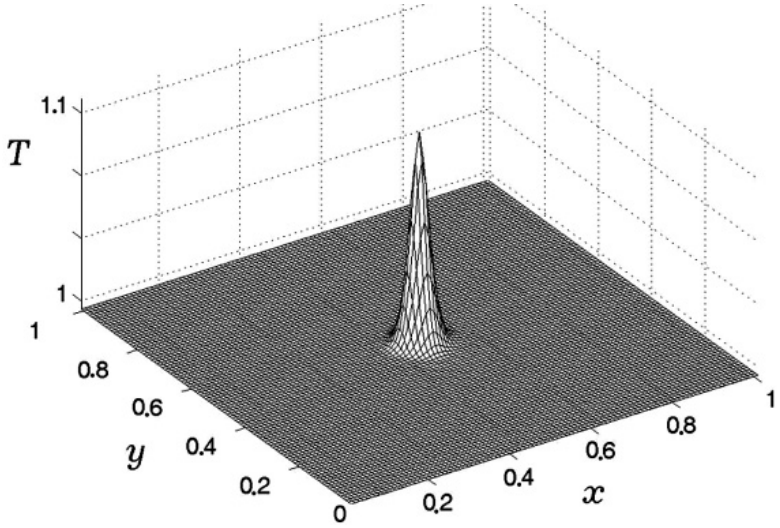


Рис. 5.7. Распределение температуры $T\big|_{z=0} = T_0(x, y)$
в момент достижения ею своего максимального значения

Выбор в таком виде граничных условий с одной стороны наиболее адекватен физической сущности природных явлений конвекции атмосферного воздуха, а с другой стороны позволяет организовать процедуру численного построения решения полной системы уравнений Навье – Стокса для моделирования трехмерных нестационарных конвективных течений атмосферного воздуха и обеспечить устойчивость вычислительной схемы.

В задаче численного моделирования возникающих сложных конвективных течений воздуха над нагревающейся нижней поверхностью контейнера рассматривается в расчетной области в виде куба (рис. 5.8). Его нижняя грань, совпадающая с поверхностью Земли, имеет форму квадрата со стороной, равной единичному масштабному значению расстояния (размерное значение 10 м).

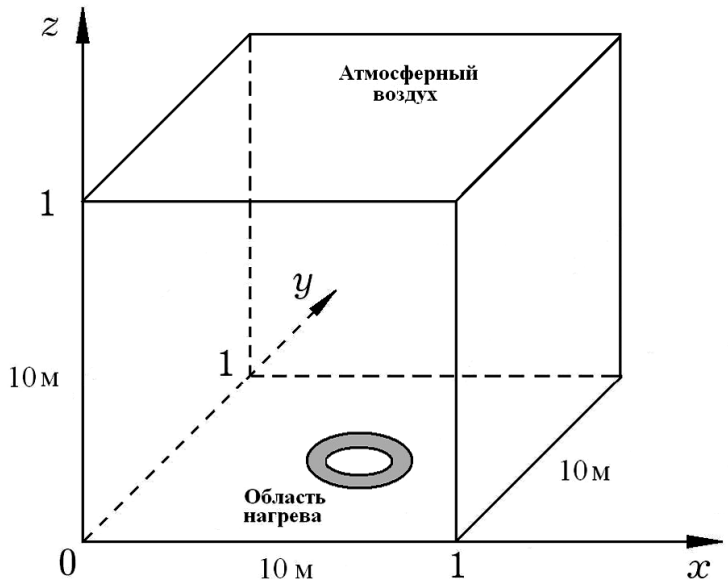


Рис. 5.8. Расчетная область в виде куба

Начальные условия для моделирования этой задачи выбираются такими же, как в первой задаче (за исключением масштабного размерного значения расстояния 10 м).

Граничные условия для моделирования рассматриваемой задачи предлагаются следующие.

Для **плотности** на всех шести гранях расчетного куба ставится «условие непрерывности», при котором значения плотности на границу области сносятся линейной интерполяцией из внутренней части расчетной области. Это означает, что в процессе расчетов плотность воздуха может изменяться на всех гранях расчетного куба в соответствии с установленными в полной системе уравнений Навье – Стокса закономерностями. Например, для нижней и верхней грани $z = 0$, $z = z^0$ (рис. 5.1) плотность газа рассчитывается по формуле

$$\rho(A) = 2\rho(B) - \rho(C).$$

Для **нормальных составляющих вектора скорости** ко всем граничным поверхностям берутся равными нулю $u\big|_{x=0,\,x=x^0} = 0$, $v\big|_{y=0,\,y=y^0} = 0$, $w\big|_{z=0,\,z=z^0} = 0$, а для двух других **(тангенциальных) компонент вектора скорости** ко всем граничным поверхностям ставятся «условия симметрии». Это означает, что воздух не может пересекать граничные поверхности расчетной области, но может двигаться вдоль них. «Условия симметрии» означают, что производные от тангенциальных компонент вектора скорости в направлении нормали к соответствующей грани равны нулю. Например, для верхней грани $z = z^0$ (рис. 5.6)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z^0} = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{A} \approx \frac{3u(A) - 4u(B) + u(C)}{2h} = 0,$$

откуда получается расчетная формула

$$u(A) = \frac{1}{3}\left[4u(B) - u(C)\right].$$

Для **температуры** на пяти гранях кроме нижней задаются «условия теплоизоляции», при которых производная от температуры в направлении нормали к соответствующей грани равна нулю. Другими словами, внутренняя часть расчетной области не обменивается теплом с окружающим пространством.

Для рассматриваемой задачи **температура на плоскости** $z = 0$ в кольце между концентрическими окружностями с безразмерными значениями радиусов $r_1 = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2} = 0{,}1$ и $r_2 = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2} = 0{,}3$ задана в виде функции

$$\begin{cases} T\big|_{z=0} = T_0(t,x,y) = 1 + M\left(1 - e^{-10t}\right)\cos^2(15{,}7r), \;\; 0{,}1 \le r \le 0{,}3; \\ T\big|_{z=0} = T_0(t,x,y) = 1, \; r < 0{,}1, \;\; r > 0{,}3, \end{cases}$$

моделирующей кольцеобразный локальный нагрев нижней грани расчетного куба (рис. 5.8). Задаваемый коэффициент M в последней формуле определяет максимальное значение температуры нагрева в разных вариантах расчета

и равен разности между максимальным безразмерным значением температуры локального нагрева и масштабным безразмерным значением температуры $M = T_{\max} - 1$.

Задание функции нагрева нижней поверхности расчетной области в представленном виде определено тем, что во многих технических устройствах нагревательные элементы имеют форму спирали, или форму одного или нескольких колец. Поэтому моделирование такого вида нагревательных элементов представляет практический интерес.

§6. Конечно-разностная аппроксимация полной системы уравнений Навье — Стокса

Как уже отмечалось, расчетная область в виде прямоугольного параллелепипеда заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей, определяющих разностные шаги по трем пространственным переменным. Фрагмент трехмерной расчетной сетки узлов изображен на рис. 6.1.

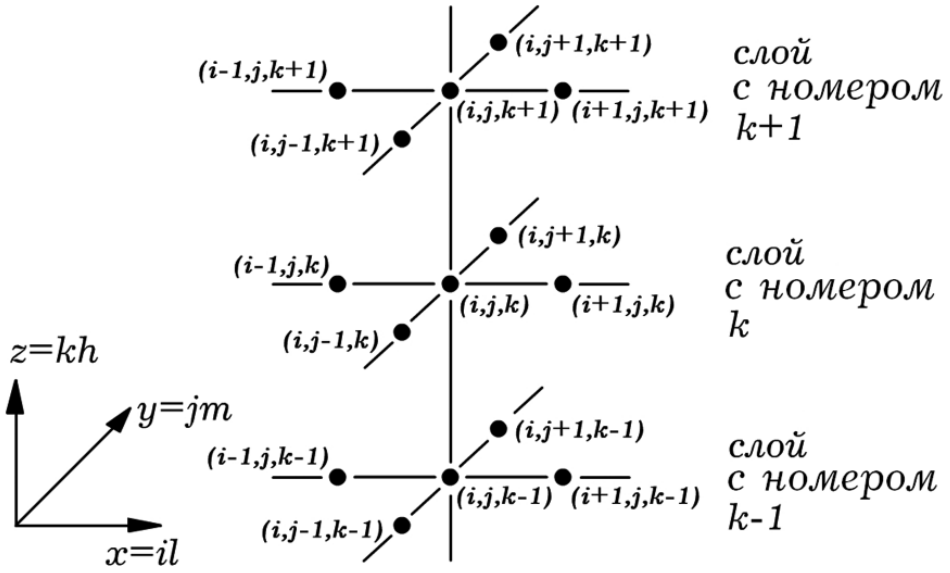


Рис. 6.1. Фрагмент трехмерной расчетной сетки узлов

По известным в начальный момент времени искомым функциям с помощью явной разностной схемы вычисляются значения искомых функций во внутренних точках прямоугольного параллелепипеда. Данная вычислительная процедура для первого уравнения системы (4.1), записанного в скалярном виде

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \tag{6.1}$$

представляется следующим образом. Воспользовавшись для аппроксимации производной по времени значениями функции плотности с двух последовательных временных слоев в узле (i, j, k)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \approx \frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}, \tag{6.2}$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным центральные разности значений функций (рис. 6.1)

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\approx\frac{\rho^n_{i+1,j,k}-\rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x};\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}\approx\frac{\rho^n_{i,j+1,k}-\rho^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y};\quad \frac{\partial\rho}{\partial z}\approx\frac{\rho^n_{i,j,k+1}-\rho^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z};\tag{6.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u^n_{i+1,j,k}-u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x};\quad \frac{\partial v}{\partial y}\approx\frac{v^n_{i,j+1,k}-v^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y};\quad \frac{\partial w}{\partial z}\approx\frac{w^n_{i,j,k+1}-w^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z},\tag{6.4}$$

перепишем уравнение (6.1) в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\rho^{n+1}_{i,j,k}-\rho^n_{i,j,k}}{\Delta t}+u^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i+1,j,k}-\rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x}+v^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i,j+1,k}-\rho^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y}+w^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i,j,k+1}-\rho^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z}+\\+\rho^n_{i,j,k}\left(\frac{u^n_{i+1,j,k}-u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x}+\frac{v^n_{i,j+1,k}-v^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y}+\frac{w^n_{i,j,k+1}-w^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right)=0.\end{gathered}\tag{6.5}$$

Отсюда получим разностное уравнение для вычисления плотности газа во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$\begin{gathered}\rho^{n+1}_{i,j,k}=\rho^n_{i,j,k}-\Delta t\cdot[u^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i+1,j,k}-\rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x}+\\+v^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i,j+1,k}-\rho^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y}+w^n_{i,j,k}\frac{\rho^n_{i,j,k+1}-\rho^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z}+\\+\rho^n_{i,j,k}\left(\frac{u^n_{i+1,j,k}-u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x}+\frac{v^n_{i,j+1,k}-v^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y}+\frac{w^n_{i,j,k+1}-w^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right)\Bigg].\end{gathered}\tag{6.6}$$

Аналогично для второго уравнения системы (4.1) в скалярном виде

$$\begin{gathered}u_t+uu_x+vu_y+wu_z+\frac{T}{\gamma\rho}\rho_x+\frac{1}{\gamma}T_x=\\=\frac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx}+\frac{3}{4}u_{yy}+\frac{3}{4}u_{zz}+\frac{1}{4}v_{xy}+\frac{1}{4}w_{xz}\right).\end{gathered}\tag{6.7}$$

Аппроксимируя производную по времени значениями функции скорости u с двух последовательных временных слоев в узле (i, j, k)

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u^{n+1}_{i,j,k}-u^n_{i,j,k}}{\Delta t},\tag{6.8}$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным центральные разности значений функций

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\approx\frac{\rho^n_{i+1,j,k}-\rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x};\quad \frac{\partial T}{\partial x}\approx\frac{T^n_{i+1,j,k}-T^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x};\tag{6.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u^n_{i+1,j,k}-u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}\approx\frac{u^n_{i,j+1,k}-u^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y};\quad \frac{\partial u}{\partial z}\approx\frac{u^n_{i,j,k+1}-u^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z};\tag{6.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{u^n_{i+1,j,k}-2u^n_{i,j,k}+u^n_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{u^n_{i,j+1,k}-2u^n_{i,j,k}+u^n_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2};\tag{6.11}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u^n_{i,j,k+1} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2}; \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \approx \frac{v^n_{i+1,j+1,k} - v^n_{i-1,j+1,k} - v^n_{i+1,j-1,k} + v^n_{i-1,j-1,k}}{4\Delta x \Delta y}; \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \approx \frac{w^n_{i+1,j,k+1} - w^n_{i-1,j,k+1} - w^n_{i+1,j,k-1} + w^n_{i-1,j,k-1}}{4\Delta x \Delta z}. \tag{6.14}$$

Перепишем уравнение (6.7) в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{u^{n+1}_{i,j,k} - u^n_{i,j,k}}{\Delta t} + u^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i+1,j,k} - u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + v^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i,j+1,k} - u^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \\
+ w^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i,j,k+1} - u^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z} + \frac{T^n_{i,j,k}}{\gamma\rho^n_{i,j,k}}\frac{\rho^n_{i+1,j,k} - \rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma}\frac{T^n_{i,j+1,k} - T^n_{i,j-1,k}}{2\Delta x} = \\
= \frac{\mu_0}{\rho^n_{i,j,k}}\left(\frac{u^n_{i+1,j,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{3}{4}\frac{u^n_{i,j+1,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \right. \\
+ \frac{3}{4}\frac{u^n_{i,j,k+1} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{4}\frac{v^n_{i+1,j+1,k} - v^n_{i-1,j+1,k} - v^n_{i+1,j-1,k} + v^n_{i-1,j-1,k}}{4\Delta x \Delta y} + \\
\left. + \frac{1}{4}\frac{w^n_{i+1,j,k+1} - w^n_{i-1,j,k+1} - w^n_{i+1,j,k-1} + w^n_{i-1,j,k-1}}{4\Delta x \Delta z}\right).
\end{gathered} \tag{6.15}$$

Отсюда получим разностное уравнение для вычисления первой компоненты скорости u во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$\begin{gathered}
u^{n+1}_{i,j,k} = u^n_{i,j,k} - \Delta t\left[u^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i+1,j,k} - u^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + v^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i,j+1,k} - u^n_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \right. \\
+ w^n_{i,j,k}\frac{u^n_{i,j,k+1} - u^n_{i,j,k-1}}{2\Delta z} + \frac{T^n_{i,j,k}}{\gamma\rho^n_{i,j,k}}\frac{\rho^n_{i+1,j,k} - \rho^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma}\frac{T^n_{i+1,j,k} - T^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x} - \\
- \frac{\mu_0}{\rho^n_{i,j,k}}\left(\frac{u^n_{i+1,j,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{3}{4}\frac{u^n_{i,j+1,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \right. \\
+ \frac{3}{4}\frac{u^n_{i,j,k+1} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{4}\frac{v^n_{i+1,j+1,k} - v^n_{i-1,j+1,k} - v^n_{i+1,j-1,k} + v^n_{i-1,j-1,k}}{4\Delta x \Delta y} + \\
\left.\left. + \frac{1}{4}\frac{w^n_{i+1,j,k+1} - w^n_{i-1,j,k+1} - w^n_{i+1,j,k-1} + w^n_{i-1,j,k-1}}{4\Delta x \Delta z}\right)\right].
\end{gathered} \tag{6.16}$$

Для третьего уравнения системы (4.1), записанного в скалярном виде

$$\begin{gathered}
v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = \\
= \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz}\right).
\end{gathered} \tag{6.17}$$

Аппроксимируя производную по времени значениями функции скорости v с двух последовательных временных слоев в узле (i, j, k)

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}, \tag{6.18}$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным центральные разности значений функций (рис. 6.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} \approx \frac{\rho_{i,j+1,k}^{n} - \rho_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2}; \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \approx \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}; \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1,k}^{n} - u_{i-1,j+1,k}^{n} - u_{i+1,j-1,k}^{n} + u_{i-1,j-1,k}^{n}}{4\Delta x \Delta y}; \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \approx \frac{w_{i,j+1,k+1}^{n} - w_{i,j-1,k+1}^{n} - w_{i,j+1,k-1}^{n} + w_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y \Delta z}, \tag{6.24}$$

перепишем уравнение (6.17) в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} + u_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \\
+ w_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{T_{i,j,k}^{n}}{\gamma \rho_{i,j,k}^{n}} \frac{\rho_{i,j+1,k}^{n} - \rho_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} = \\
= \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^{n}} \left(\frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2} + \right. \\
+ \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^{n} - u_{i-1,j+1,k}^{n} - u_{i+1,j-1,k}^{n} + u_{i-1,j-1,k}^{n}}{4\Delta x \Delta y} + \\
\left. + \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^{n} - w_{i,j-1,k+1}^{n} - w_{i,j+1,k-1}^{n} + w_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y \Delta z} \right).
\end{gathered} \tag{6.25}$$

Отсюда получим разностное уравнение для вычисления второй компоненты скорости v во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$v_{i,j,k}^{n+1} = v_{i,j,k}^{n} - \Delta t \Bigg[u_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} +$$

$$+ w_{i,j,k}^{n} \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{T_{i,j,k}^{n}}{\gamma \rho_{i,j,k}^{n}} \frac{\rho_{i,j+1,k}^{n} - \rho_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} -$$

$$- \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^{n}} \Bigg(\frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2} + \tag{6.26}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - 2v_{i,j,k}^{n} + v_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^{n} - u_{i-1,j+1,k}^{n} - u_{i+1,j-1,k}^{n} + u_{i-1,j-1,k}^{n}}{4\Delta x \Delta y} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^{n} - w_{i,j-1,k+1}^{n} - w_{i,j+1,k-1}^{n} + w_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y \Delta z} \Bigg) \Bigg].$$

Для четвертого уравнения системы (4.1), записанного в скалярном виде

$$w_t + u w_x + v w_y + w w_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_z + \frac{1}{\gamma} T_z =$$

$$= \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4} w_{xx} + \frac{3}{4} w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4} u_{xz} + \frac{1}{4} v_{yz} \right). \tag{6.27}$$

Аппроксимируя производную по времени значениями функции скорости w с двух последовательных временных слоев в узле (i, j, k)

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}, \tag{6.28}$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным используя центральные разности значений функций (рис. 6.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \approx \frac{\rho_{i,j,k+1}^{n} - \rho_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1,j,k}^{n} - w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_{i,j+1,k}^{n} - w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i+1,j,k}^{n} - 2w_{i,j,k}^{n} + w_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j+1,k}^{n} - 2w_{i,j,k}^{n} + w_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2}; \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - 2w_{i,j,k}^{n} + w_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}; \tag{6.32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \approx \frac{u_{i+1,j,k+1}^{n} - u_{i-1,j,k+1}^{n} - u_{i+1,j,k-1}^{n} + u_{i-1,j,k-1}^{n}}{4\Delta x \Delta z}; \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \approx \frac{v_{i,j+1,k+1}^{n} - v_{i,j-1,k+1}^{n} - v_{i,j+1,k-1}^{n} + v_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y \Delta z}, \tag{6.34}$$

перепишем уравнение (6.27) в виде:

$$\frac{w_{i,j,k}^{n+1}-w_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}+u_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i+1,j,k}^{n}-w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}+v_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i,j+1,k}^{n}-w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}+$$
$$+w_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i,j,k+1}^{n}-w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}+\frac{T_{i,j,k}^{n}}{\gamma\rho_{i,j,k}^{n}}\frac{\rho_{i,j,k+1}^{n}-\rho_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}+\frac{1}{\gamma}\frac{T_{i,j,k+1}^{n}-T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}=$$
$$=-g+\frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^{n}}\left(\frac{3}{4}\frac{w_{i+1,j,k}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{3}{4}\frac{w_{i,j+1,k}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2}+\right.$$
$$+\frac{w_{i,j,k+1}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}+ \tag{6.35}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{u_{i+1,j,k+1}^{n}-u_{i-1,j,k+1}^{n}-u_{i+1,j,k-1}^{n}+u_{i-1,j,k-1}^{n}}{4\Delta x\Delta z}+$$
$$\left.+\frac{1}{4}\frac{v_{i,j+1,k+1}^{n}-v_{i,j-1,k+1}^{n}-v_{i,j+1,k-1}^{n}+v_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y\Delta z}\right).$$

Отсюда получим разностное уравнение для вычисления третьей компоненты скорости w во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$w_{i,j,k}^{n+1}=w_{i,j,k}^{n}-\Delta t\left[\left(u_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i+1,j,k}^{n}-w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}+v_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i,j+1,k}^{n}-w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}+\right.\right.$$
$$+w_{i,j,k}^{n}\frac{w_{i,j,k+1}^{n}-w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}+\frac{T_{i,j,k}^{n}}{\gamma\rho_{ijk}^{n}}\frac{\rho_{i,j,k+1}^{n}-\rho_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}+\frac{1}{\gamma}\frac{T_{i,j,k+1}^{n}-T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}+g-$$
$$-\frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^{n}}\left(\frac{3}{4}\frac{w_{i+1,j,k}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{3}{4}\frac{w_{i,j+1,k}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2}+\right. \tag{6.36}$$
$$+\frac{w_{i,j,k+1}^{n}-2w_{i,j,k}^{n}+w_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}+\frac{1}{4}\frac{u_{i+1,j,k+1}^{n}-u_{i-1,j,k+1}^{n}-u_{i+1,j,k-1}^{n}+u_{i-1,j,k-1}^{n}}{4\Delta x\Delta z}+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{4}\frac{v_{i,j+1,k+1}^{n}-v_{i,j-1,k+1}^{n}-v_{i,j+1,k-1}^{n}+v_{i,j-1,k-1}^{n}}{4\Delta y\Delta z}\right)\right].$$

И, наконец, для пятого уравнения системы (4.1), записанного в скалярном виде

$$T_t+uT_x+vT_y+wT_z+(\gamma-1)T(u_x+v_y+w_z)=\frac{\kappa_0}{\rho}(T_{xx}+T_{yy}+T_{zz})+$$
$$+\frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\left\{\left[(u_x-v_y)^2+(u_x-w_z)^2+(v_y-w_z)^2\right]+\right. \tag{6.37}$$
$$\left.+\frac{3}{2}\left[(u_y+v_x)^2+(u_z+w_x)^2+(v_z+w_y)^2\right]\right\}.$$

Аппроксимируя производную по времени значениями функции температуры T с двух последовательных временных слоев в узле (i, j, k)

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}, \tag{6.38}$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным используя центральные разности значений функций

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{n} - T_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.40}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1,k}^{n} - u_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{u_{i,j,k+1}^{n} - u_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.41}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1,j,k}^{n} - w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_{i,j+1,k}^{n} - w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}; \tag{6.42}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2}; \tag{6.43}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}, \tag{6.44}$$

перепишем уравнение (6.37) в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} + u_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i+1,j,k}^{n} - T_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + w_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \\
+(\gamma-1)T_{i,j,k}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}\right) = \\
= \frac{\kappa_0}{\rho_{i,j,k}^{n}}\left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2}\right) + \\
+\frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho_{i,j,k}^{n}}\left\{\left[\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} - \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}\right)^2 + \right.\right. \\
\left. + \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} - \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z}\right)^2\right] + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n} - u_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}\right)^2 + \right. \\
\left.\left. + \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n} - u_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{w_{i+1,j,k}^{n} - w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{w_{i,j+1,k}^{n} - w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y}\right)^2\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{6.45}$$

Получим разностное уравнение для вычисления температуры T во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^{n} - \Delta t \left\{ u_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i+1,j,k}^{n} - T_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + w_{i,j,k}^{n} \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - T_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \right.$$

$$+(\gamma-1)T_{i,j,k}^{n} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} \right) -$$

$$-\frac{\kappa_0}{\rho_{i,j,k}^{n}} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i-1,j,k}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j-1,k}^{n}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j,k-1}^{n}}{(\Delta z)^2} \right) -$$

$$-\frac{\mu_0 \gamma(\gamma-1)}{2\rho_{i,j,k}^{n}} \left\{ \left[\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} - \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} \right)^2 + \right. \tag{6.46}$$

$$\left. + \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} - \frac{w_{i,j,k+1}^{n} - w_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n} - u_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n} - u_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{w_{i+1,j,k}^{n} - w_{i-1,j,k}^{n}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n}}{2\Delta z} + \frac{w_{i,j+1,k}^{n} - w_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} \right)^2 \right] \right\} \right\}.$$

Полученные выше соотношения (6.6), (6.16), (6.26), (6.36), (6.46) являются конечно-разностными уравнениями полной системы уравнений Навье – Стокса для численного расчета всех газодинамических функций $n + 1$ временного слоя во всех внутренних узлах расчетной области в тройном вложенном цикле по трем пространственным переменным. После этого, используя граничные условия, значения искомых функций рассчитываются во всех точках граней, ребер и вершин расчетной области. Алгоритм расчета подробно описан в пятом параграфе.

§7. Программно-вычислительный комплекс и несколько способов его тестирования

Для численного решения полной системы уравнений Навье – Стокса был разработан программно-вычислительный комплекс, в основе которого лежат четыре программы, получившие свидетельства о государственной регистрации.

Программно-вычислительный комплекс состоит из пяти основных блоков (рис. 7.1):

– блока входных данных;
– расчетного блока;
– блока расчета энергетических характеристик течений;
– блока построений линий тока течений;
– блока хранения расчетной информации.

Исходные данные – шаги по пространству и времени, масштабные значения используемых величин, начальные и краевые условия, коэффициенты

вязкости и теплопроводности, используемые в расчетах константы – размещаются пользователем в блоке входных данных перед началом работы программно-вычислительного комплекса. При этом предусмотрена возможность выбора необходимых значений входных параметров из нескольких возможных.

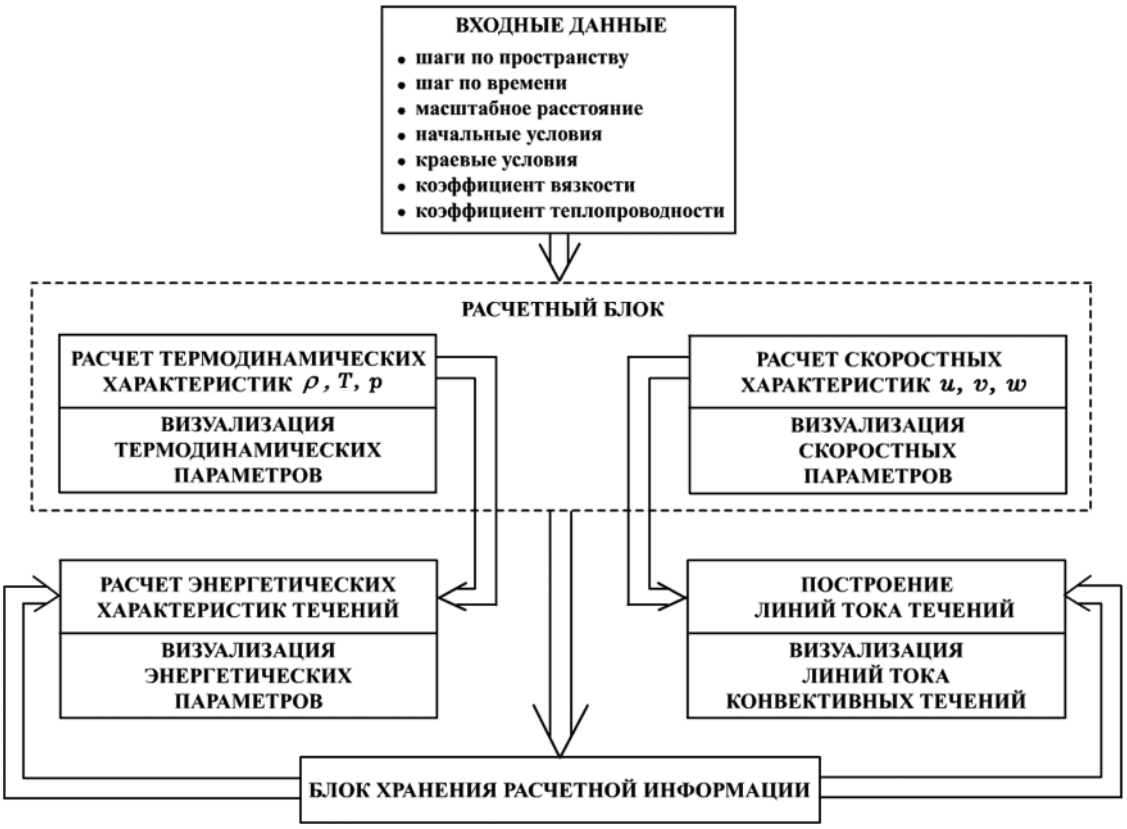


Рис. 7.1. Программно-вычислительный комплекс

Исходные входные данные поступают основной расчетный блок, в котором с помощью явной разностной схемы с учетом начальных и граничных условий численно строятся решения полной системы уравнений Навье – Стокса и определяются термодинамические и скоростные характеристики возникающих конвективных потоков во всех узлах расчетной области в различные последующие моменты времени.

Результаты работы расчетного блока могут передаваться в качестве исходных данных для двух других блоков – блока расчетов энергетических характеристик и блока построения линий тока.

Тестирование программно-вычислительного комплекса осуществлялось несколькими способами.

Во-первых, в качестве начального течения задавались параметры стационарного точного решения при учете силы тяжести, описанного в §4 и зависящего только от переменной z. В качестве контроля тестирования в процессе нестационарного трехмерного расчета отслеживались изменения газодинамических параметров по ходу счета. Они, естественно, менялись, но, как

оказалось, только в пределах вычислительной погрешности метода: в четвертом-пятом знаках после запятой. Поэтому можно сделать вывод, что нестационарным расчетом точное стационарное решение передается верно.

Во-вторых, в присутствии силы тяжести были проведены расчеты нестационарного конвективного течения, возникающего при задании на плоскости $z = 0$ постоянного теплового режима, локально превышающего распределение температуры при $z = 0$ у точного стационарного течения. Через 10000 шагов по времени расчеты привели практически к стационарному конвективному течению, параметры которого хоть и менялись с последующим увеличением времени, но незначительно и картина линий тока оставалась практически неизменной. После того, как локальный прогрев был убран, то есть на плоскости $z = 0$ снова задавалась постоянная температура, значение которой бралось из точного стационарного решения, конвективный поток за 500 шагов по времени исчезал, и течение вновь становилось стационарным, зависящим только от координаты z и совпадающим с точным стационарным решением.

В-третьих, нестационарным трехмерным расчетом с использованием созданного комплекса программ были повторены расчеты одномерных нестационарных течений [119]. Начальные данные вносили гладкое возмущение в однородный покоящийся без воздействия силы тяжести газ. Это возмущение распространялось, и с течением времени передний фронт возмущения становился все круче. Это передает возникновение размазанного ударного перехода, описанного Р. Беккером [120]. Сравнение результатов расчетов из работы [119] и полученных по описываемой программе также показало их совпадение в пределах вычислительной погрешности.

Также проведен расчет одномерного нестационарного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа. В начальный момент времени плотность газа постоянна и равна единице, скорость газа равна нулю, то есть $u = v = w = 0$, а температура задана следующим соотношением $T(t, x)\big|_{t=0} = 1 + 0{,}1\cos(\pi x)$, и на границах отрезка $0 \le x \le 1$ заданы условия прилипания и теплоизоляции

$$u(t, x)\big|_{x=0,\, x=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0,\, x=1} = 0. \tag{7.1}$$

Результаты расчетов газодинамических параметров в некоторые фиксированные моменты времени для $z^0 = 0{,}05$ представлены на последующих рисунках. На рис. 7.2 и 7.3 приведены графики функций $\rho(x, y)$ и $T(x, y)$ на 1000 временном шаге. При увеличении времени счета значения плотности и температуры постепенно приближаются к единице, сохраняя при этом косинусоидальную зависимость от x.

На рис. 7.4 и 7.5 приведены результаты расчета первой компоненты u скорости для двух моментов времени. Видно, что за представленный промежуток времени параболическая зависимость этой компоненты скорости постепенно переходит в волнообразную зависимость от координаты x.

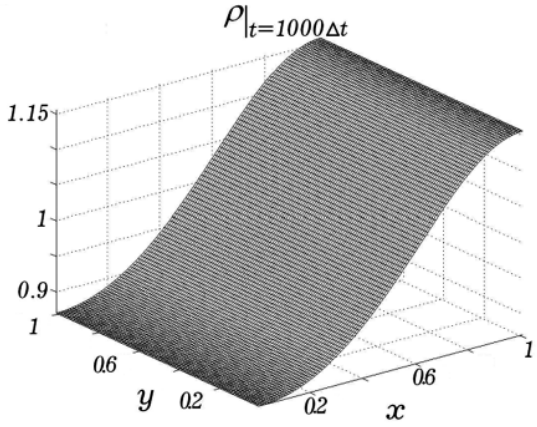


Рис. 7.2

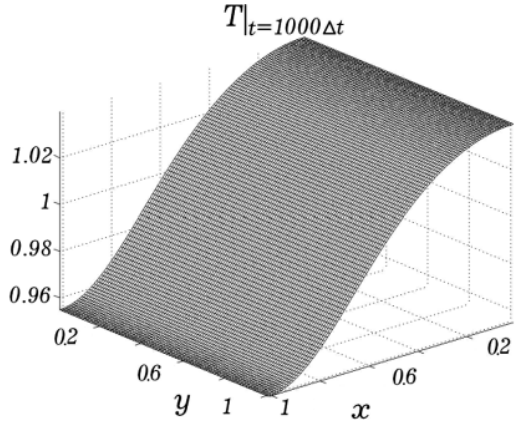


Рис. 7.3

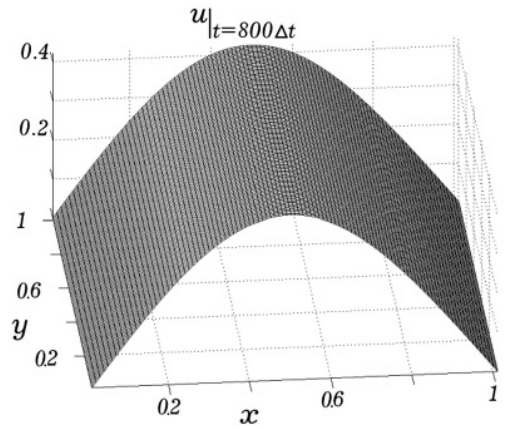


Рис. 7.4

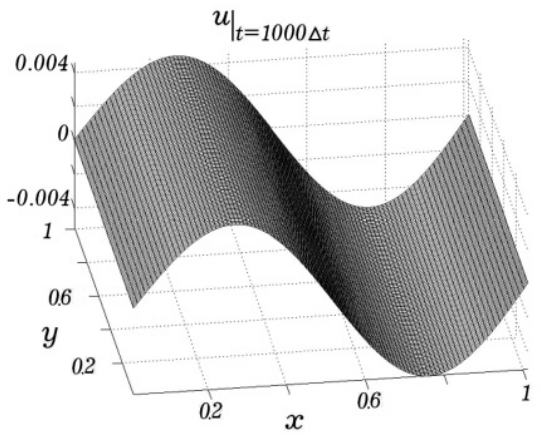


Рис. 7.5

На рис. 7.6 и 7.7 изображены результаты расчетов второй компоненты v скорости для двух моментов времени. Как следует из приведенных рисунков, эта компонента скорости равна нулю во всех точках за исключением небольших пиков по углам. Величина этих пиков имеет порядок 10^{-8} и никак не сказывается на вычислении плотности, температуры и первой компоненты скорости. Этот расчетный эффект связан с неизбежным незначительным скачком второй компоненты скорости в вертикальных гранях расчетной области.

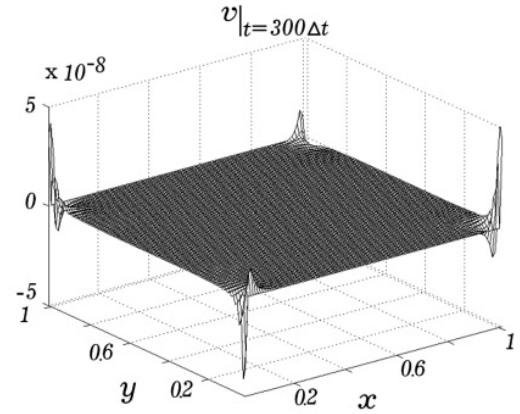


Рис. 7.6

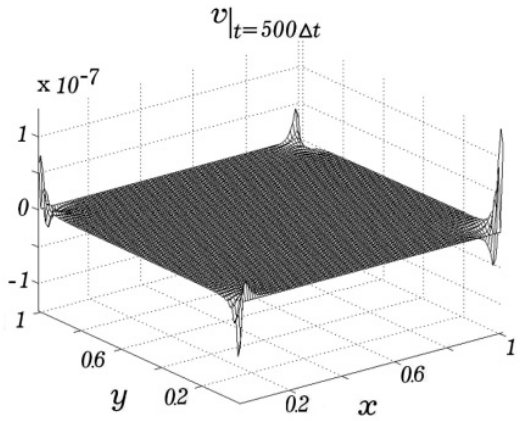


Рис. 7.7

На рис. 7.8 и 7.9 приводятся результаты расчетов третей компоненты w скорости для трех моментов времени. При расчете этой компоненты скорости в начальные моменты времени вблизи плоскостей $x = 0$ и $x = 1$ возникают «иглы», величина которых $10^{-17}...10^{-16}$. Приблизительно к 400 расчетному шагу по времени эти «иглы» исчезают и графические зависимости вертикальной составляющей скорости становятся гладкими поверхностями, а отличия значений скорости от нуля имеют величину порядка 10^{-12}.

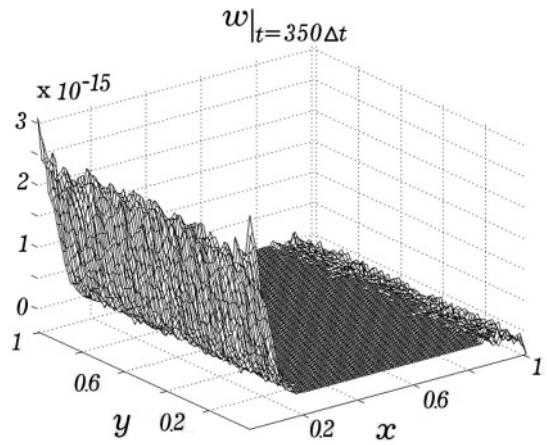


Рис. 7.8

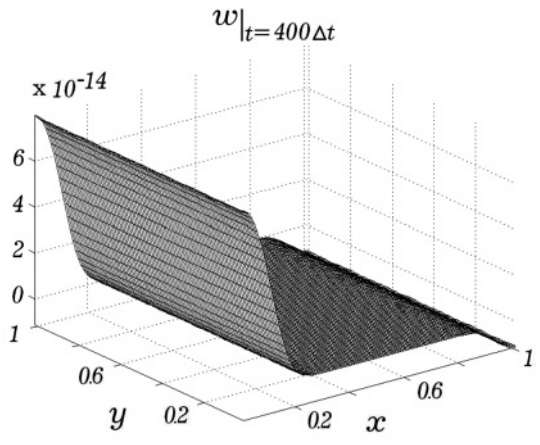


Рис. 7.9

Таким образом, в приведенном трехмерном расчете фактическая зависимость ρ, u, T только от одной пространственной переменной и фактическое равенство нулю функций v и w полностью соответствуют моделированию одномерного нестационарного течения [119, 121].

В данной главе рассмотрена математическая модель для описания начальной стадии сложных конвективных течений сжимаемого теплопроводного газа, основанная на численном решении полной системы уравнений Навье – Стокса. Эта модель наиболее адекватно описывает физические процессы в конвективных течениях, поскольку учитывает диссипативные свойства движущейся сжимаемой сплошной среды – вязкости и теплопроводности.

Предложены начальные и граничные условия для численного построения решений полной системы уравнений Навье – Стокса и их конечно-разностная аппроксимация.

Описан программно-вычислительный комплекс на основе четырех программ, позволяющий проводить численное решение задач, связанных с описанием указанных конвективных течений и определения их основных параметров. А также приведены результаты тестирования программно-вычислительного комплекса.

Глава III. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В данной главе представлены результаты математического и численного моделирования начальной стадии нестационарного трехмерного конвективного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа при различных схемах локального нагрева нижней поверхности и зависимости термодинамических и газодинамических характеристик указанных течений от температуры нагрева.

§8. Численное моделирование конвективных течений при локальной кольцевой схеме нагрева

В данном параграфе рассматриваются результаты математического и численного моделирования трехмерных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести. Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными. За начальные условия принимаются функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье – Стокса. В качестве краевых предлагаются условия, описанные в пятом параграфе.

Конвективный поток газа инициируется кольцеобразным нагревом подстилающей поверхности. Решения полной системы уравнений Навье – Стокса строятся численно по явной разностной схеме в кубе с единичной длиной ребра. Приведены результаты расчетов плотности, температуры, давления, трех составляющих векторов скоростей частиц газа, а также построены линии тока в начальной стадии формирования свободного конвективного потока.

Начальные условия при описании конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности берутся в виде функций, задающих известное точное аналитическое решение [94] системы (4.1):

$$u = 0;\ v = 0;\ w = 0; \tag{8.1}$$

$$T_0(z) = 1 - kz; \quad k = \frac{lx_{00}}{T_{00}};\ I = 0{,}0065\ \text{К/м};\ x_{00} = 10\ \text{м};\ T_{00} = 288\,°\text{К}; \tag{8.2}$$

$$\rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}; \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \tag{8.3}$$

Расчетная область представляет собой куб с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 1$ вдоль осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Для плотности на всех шести гранях куба $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ задается «условие непрерывности» [95].

Для температуры на пяти гранях куба $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$ $z = z^0$ задаются условия теплоизоляции («условие симметрии»)[95].

На нижней плоскости $z = 0$ значения температуры в кольце между концентрическими окружностями с безразмерными значениями радиусов $r_1 = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2} = 0{,}1$ и $r_2 = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2} = 0{,}3$ заданы в виде функции

$$\begin{cases} T\big|_{z=0} = T_0(t,x,y) = 1 + M\left(1 - e^{-10t}\right)\cos^2(15{,}7r), \ 0{,}1 \le r \le 0{,}3; \\ T\big|_{z=0} = T_0(t,x,y) = 1, r < 0{,}1, \ r > 0{,}3, \end{cases} \tag{8.4}$$

моделирующей кольцеобразный локальный нагрев нижней грани расчетного куба. Задаваемый коэффициент M в формуле (8.4) определяет максимальное значение температуры нагрева в разных вариантах расчета и равен разности между максимальным безразмерным значением температуры локального нагрева и масштабным безразмерным значением температуры $M = T_{\max} - 1$.

Краевые условия для компонент вектора скорости газа на всех шести гранях берутся из «условий непротекания» для нормальной к граничной поверхности составляющей вектора скорости и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [95]. Данные краевые условия фактически означают рассмотрение конвективного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в непроницаемой и теплоизолированной кубической емкости.

Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей с разностными шагами по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$, $\Delta z = 0{,}1$, и шагом по времени $\Delta t = 0{,}001$.

Расчеты проводились при масштабных размерных значениях плотности, скорости, расстояния и времени равными соответственно $\rho_{00} = 1{,}2928$ кг/м^3, $u_{00} = 333$ м/с, $x_{00} = 10$ м, $t_{00} = x_{00}/u_{00} = 0{,}03$ с. Безразмерное и соответствующее размерное значение коэффициента M следующие: $M = 0{,}125$, $M_* = 36\,°$C.

На рис. 8.1–8.4 представлены результаты расчета плотности газа в виде графиков функции двух переменных $\rho(x, y)$ на фиксированной высоте $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех расчетных шагов по времени. По осям координат x и y отложены безразмерные значения расстояния.

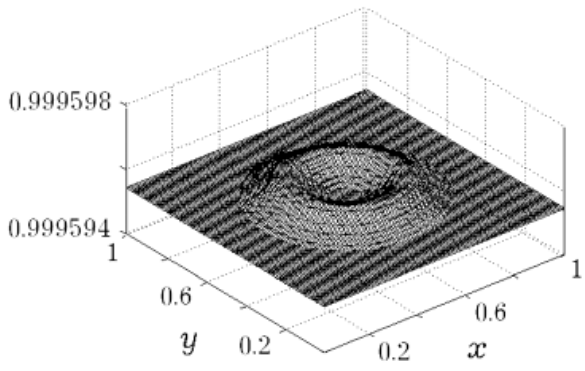


Рис. 8.1. Плотность на 50 шаге

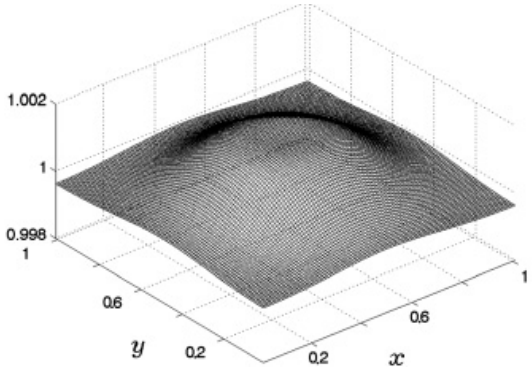


Рис. 8.2. Плотность на 300 шаге

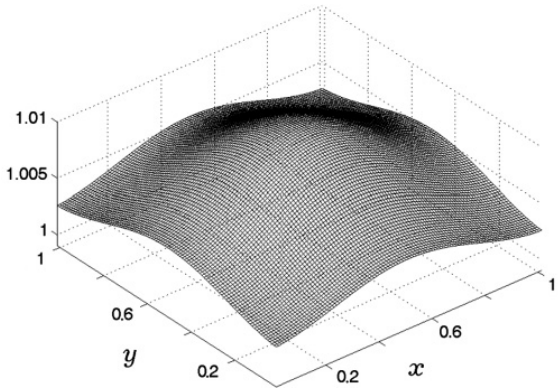


Рис. 8.3. Плотность на 3000 шаге

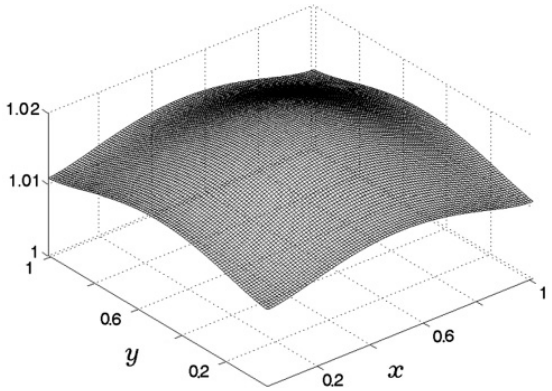


Рис. 8.4. Плотность на 10000 шаге

Из приведенных рисунков видно, что поведение плотности газа за рассчитанное время можно характеризовать следующим образом.

Периферийные значения плотности, близкие к боковым граням расчетной области, для каждого отдельного фиксированного момента времени меняются незначительно. В центральной части боковых граней значения плотности больше, а в углах – меньше. Это, по-видимому, связано с более интенсивным притоком газа к центрам боковых граней, чем к областям, близким к вертикальным ребрам.

Общее фоновое безразмерное значение плотности с течением времени увеличивается от 1 до 1,02, что соответствует изменению размерных значений в пределах от 1,2928 до 1,3187 кг/м^3.

Распределение плотности в начале нагрева имеет форму кольца, центр которого совпадает с геометрическим центром квадратного сечения расчетной области, а радиус его совпадает с радиусом кольца нагрева. С течением времени происходит расширение кольца с повышенными значениями плотности и его размывание в пространстве и к 10000 расчетному шагу по времени область повышенных значений плотности практически достигают боковых граней расчетного куба.

С течением времени меняется и геометрическая симметрия плотности. В начале кольцеобразного прогрева нижней поверхности плотность газа имеет четко выраженную центральную симметрию, а с течением времени область центральной симметрии, расширяясь к боковым граням, меняется на прямоугольную.

На рис. 8.5–8.8 приведены результаты расчета температуры газа в виде графиков функции двух переменных $T(x, y)$ на фиксированной высоте $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех таких же расчетных шагов по времени.

Поведение рассчитанных значений температуры как функций координат и времени отлично от аналогичного поведения плотности. Периферийные значения температуры в начале прогрева также близки к единичному, а с течением времени наблюдаются немонотонные их изменения. Фоновые безразмерные значения температуры в областях, близких к боковым граням расчетного куба, с течением времени изменяются существенно меньше,

чем значения плотности. В рассчитанном диапазоне временных шагов эти значения температуры меняются в пределах от 1 до 1,0025 (в размерных значениях от 288 до 288,72 °К).

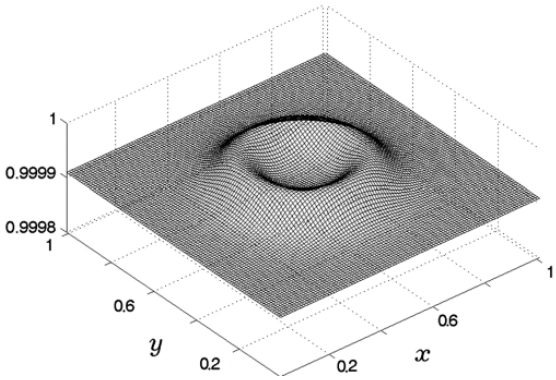


Рис. 8.5. Температура на 50 шаге

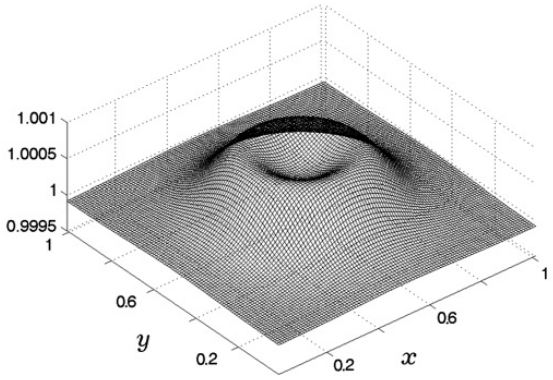


Рис. 8.6. Температура на 300 шаге

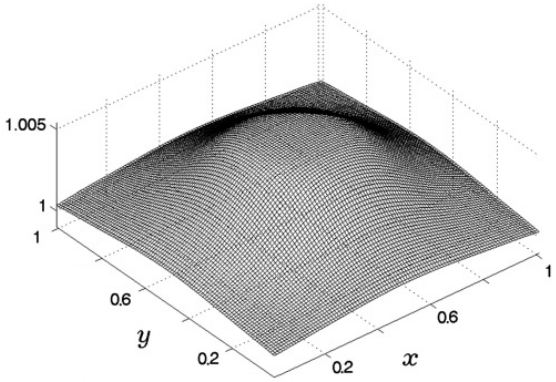


Рис. 8.7. Температура на 3000 шаге

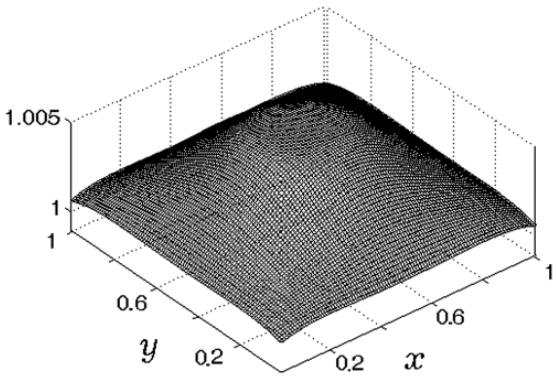


Рис. 8.8. Температура на 10000 шаге

Что касается геометрической симметрии, то с течением времени она для температуры практически не меняется со временем. В начале кольцеобразного прогрева нижней поверхности температура газа имеет четко выраженную кольцеобразную центральную симметрию, которая с течением времени расширяясь к боковым граням, сохраняет кольцеобразный характер. Отличием поведения температуры от поведения плотности является существенно большее увеличение ее в центральной области до значений 1,01 (размерное значение 290,88 °К). Как видно из приведенного рис. 8.8 это увеличение температуры имеет вид колокола, что связано с более интенсивным прогревом центральной области. Кольцеобразный нагрев подстилающей поверхности, очевидно, сказывается на поведении температуры нагрева на этой фиксированной высоте в центральной части исследуемой области и визуализируется в виде воронки в центре колоколообразной поверхности.

На рис. 8.9–8.12 приведены результаты расчета давления газа в виде графиков функции двух переменных $p(x, y)$ на фиксированной высоте $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех расчетных шагов по времени. Поскольку давление есть произведение плотности на температуру, то его поведение

как функции координат и времени во многом совпадает с аналогичным поведением плотности и температуры.

Общим в поведении давления в рассмотренном промежутке времени является рост фонового периферийного значения от 1 до 1,023 (размерные значения от 100 до 102,3 кПа) и постепенный переход от кольцевой структуры к колоколообразной при сохранении осевой центральной симметрии. Превышение максимальных значений давления над фоновыми для 10000 расчетного шага по времени составляет 0,007 (размерное значение 700 Па).

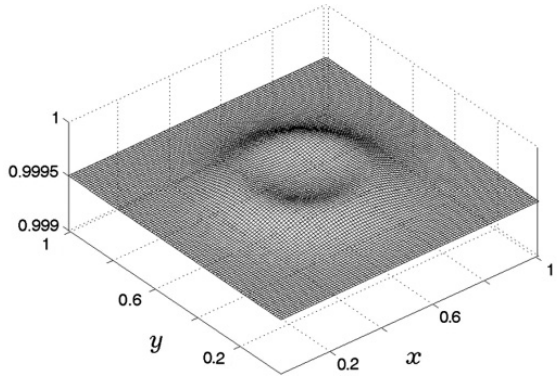


Рис. 8.9. Давление на 50 шаге

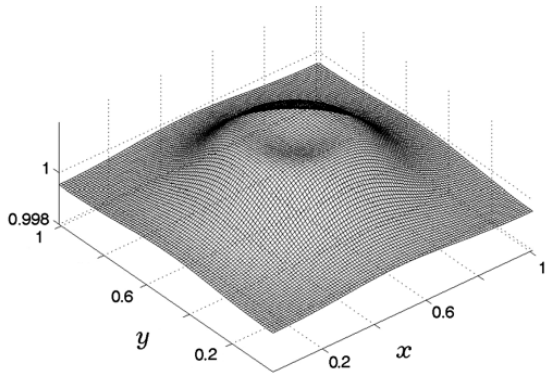


Рис. 8.10. Давление на 300 шаге

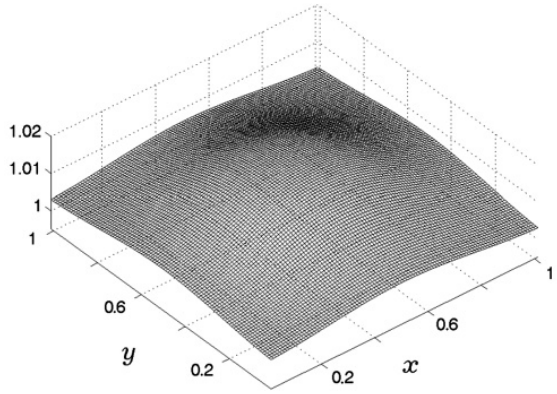


Рис. 8.11. Давление на 3000 шаге

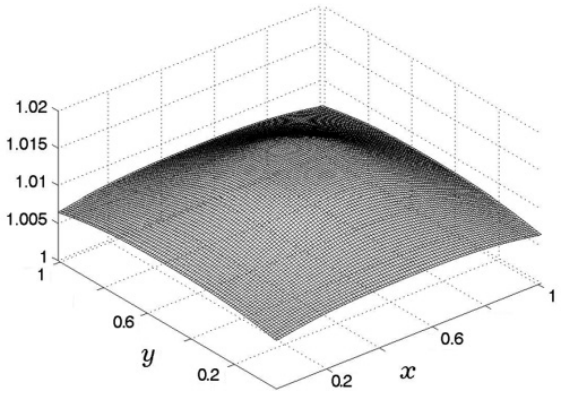


Рис. 8.12. Давление на 10000 шаге

Кроме того, при тех же начальных и краевых условиях было осуществлено математическое моделирование и проведен численный расчет скоростных характеристик начальной стадии формирования трехмерного нестационарного конвективного течения газа, вызванного локальным кольцеобразным прогревом нижней поверхности расчетной области.

На рис. 8.13–8.16 представлены графики x-й компоненты скорости газа для фиксированной высоты $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. На осях координат x, y отложены безразмерные значения расстояния.

Из приведенных рисунков видно, что поведение первой компоненты скорости газа за рассчитанное время можно характеризовать следующим образом. В самом начале прогрева, соответствующем 50 расчетному шагу

по времени (рис. 8.13), периферийные значения скорости практически равны нулю. В центре расчетной области скорости малы по значению, противоположны по знаку, и имеют четко выраженную кольцевую структуру, соответствующую кольцевой схеме нагрева нижней плоскости. Положительные и отрицательные значения первой компоненты скорости, находящиеся за пределами кольцевого нагрева, описывают расходящееся от центра вдоль радиуса движение газа. Разные же по знаку скорости, но находящиеся внутри кольца нагрева, соответствуют сходящемуся вдоль радиуса к центру потоку газа. Максимальные безразмерные значения модулей скоростей для данного расчетного момента времени составляют $2{\cdot}10^{-10}$ (размерное значение $6{,}66{\cdot}10^{-8}$ м/с).

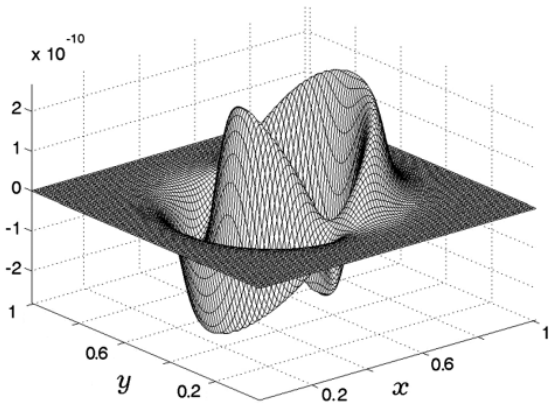


Рис. 8.13. Скорость *u* на 50 шаге

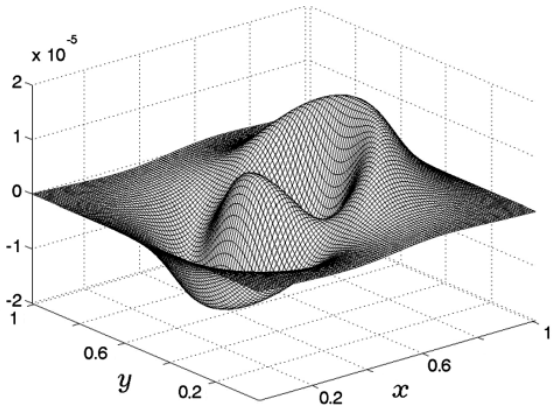


Рис. 8.14. Скорость *u* на 300 шаге

Для 300 расчетного шага по времени (рис. 8.14) область, соответствующая движению газа от центра расширяется, а область движения газа к центру сужается. При этом максимальные значения модулей скорости увеличиваются до $2{\cdot}10^{-5}$ (размерное значение 0,0067 м/с). Такие изменения первой компоненты скорости течения газа согласуются с нарастанием температуры кольцеобразного нагрева. Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю согласно «условию непротекания», установленному для этих граней расчетной области. Значения же скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ начинают заметно меняться.

Для 3000 расчетного шага по времени (рис. 8.15) область, соответствующая движению газа от центра сместилась еще ближе к боковым граням, а область движения газа к центру практически исчезла. При этом максимальные значения модулей скорости увеличиваются до 0,01 (размерное значение 3,33 м/с). Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ попрежнему равны нулю, а значения скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ изменяются по синусоидальному закону.

На 10000 расчетном шаге по времени (рис. 8.16) область, соответствующая движению газа от центра практически дошла до боковых граней. Максимальные значения модулей скорости увеличились до 0,04 (размерное значение 13,32 м/с). Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю, а значения скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ волнообразно изменяются.

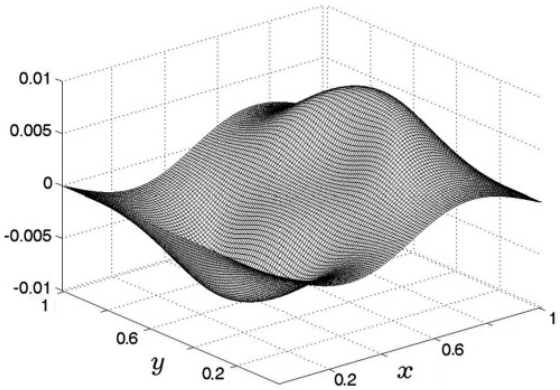


Рис. 8.15. Скорость *u* на 3000 шаге

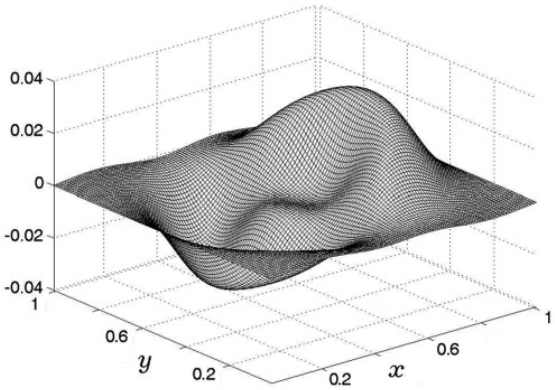


Рис. 8.16. Скорость *u* на 10000 шаге

Расчеты показали, что изменение x-й компоненты скорости газа имеет ярко выраженный нестационарный характер. Кроме того, в начальные моменты времени общая структура скоростей имеет центральную симметрию, а с течением времени она изменяется и приобретает прямоугольный характер.

На рис. 8.17–8.20 представлены графики y-й компоненты скорости газа для фиксированной высоты $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. На осях координат x, y отложены безразмерные значения расстояния.

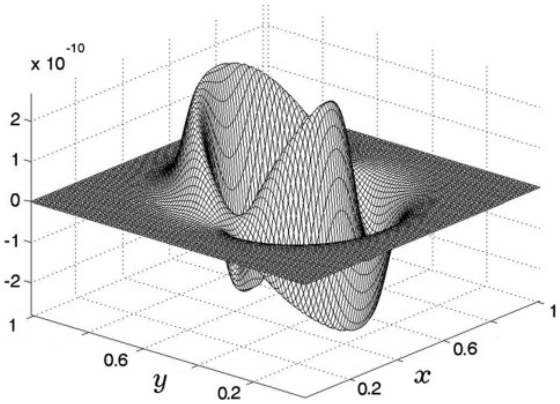


Рис. 8.17. Скорость *v* на 50 шаге

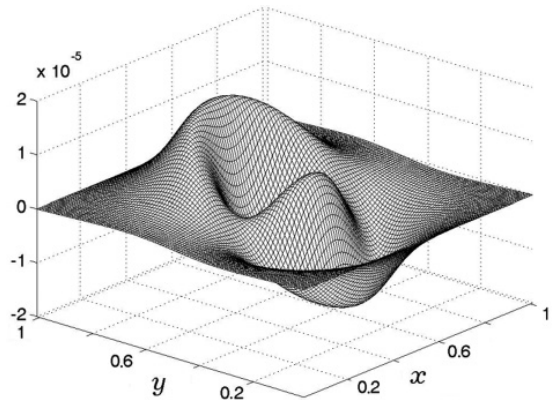


Рис. 8.18. Скорость *v* на 300 шаге

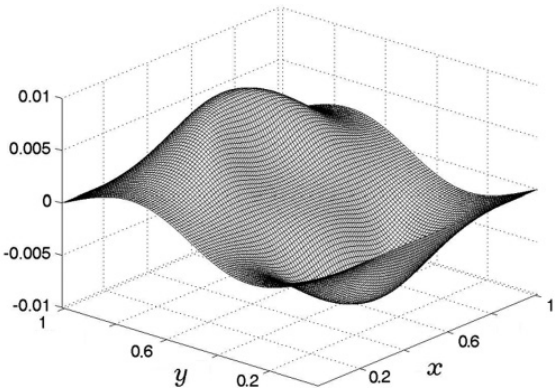


Рис. 8.19. Скорость *v* на 3000 шаге

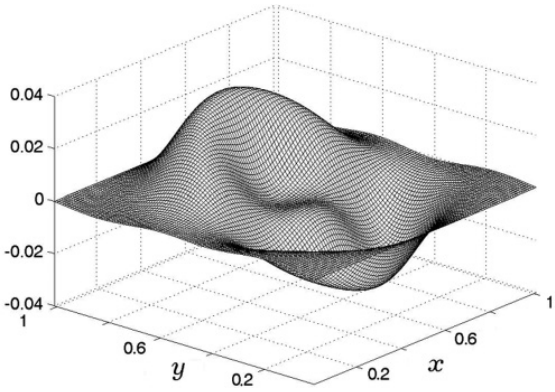


Рис. 8.20. Скорость *v* на 10000 шаге

Характер поведения y-й компоненты скорости газа полностью аналогичен поведению x-й компоненты скорости газа, с той лишь разницей, что она описывает движение газа вдоль оси y. В результате, несмотря на принятую в расчетах прямоугольную систему координат, поведение первых двух компонент скоростей таково, что оно соответствует движению газа для принятой изначально центральной кольцевой схеме нагрева подстилающей поверхности. Нестационарный конвективный поток в условиях действия силы тяжести при такой схеме нагрева сохраняет центральную симметрию.

Это хорошо видно на приведенных далее рис. 8.21–8.24 с изображениями поверхностей z-й компоненты скорости газа на той же высоте $z = 0{,}5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. В начальные моменты времени нагрева (рис. 8.21) вертикальная составляющая скорости газа имеет кольцевой характер с малыми значениями $5{\cdot}10^{-8}$ (размерное $1{,}67{\cdot}10^{-5}$ м/с) и фоновыми значениями, равными нулю. На 300 расчетном шаге по времени (рис. 8.22) фоновые значения вертикальной скорости по-прежнему близки к нулю, а кольцеобразная структура размывается в пространстве. При этом безразмерные значения вертикальной скорости достигают 10^{-3} (размерное 0,333 м/с). С 2000 расчетного шага по времени фоновые значения вертикальной компоненты скорости становятся отрицательными и на 3000 расчетном шаге (рис. 8.23) становятся равными –0,015 (размерное – 5 м/с). В центре расчетной области значения вертикальной скорости также отрицательные, но имеют куполообразную форму со значениями, близкими к нулю. Такое пространственное распределение значений вертикальной составляющей скорости говорит о том, что движение газа с 2000 расчетного шага по времени направлено вертикально вниз и скорость этого движения больше на периферийных участках и меньше в центральной части расчетной области. Далее, с течением времени, происходит дальнейший рост абсолютного значения вертикальной составляющей скорости газа вплоть до значений –0,07 (размерное – 23,3 м/с) на периферии и практически нулевых значениях в центре расчетной области на 10000 расчетном шаге по времени (рис. 8.24).

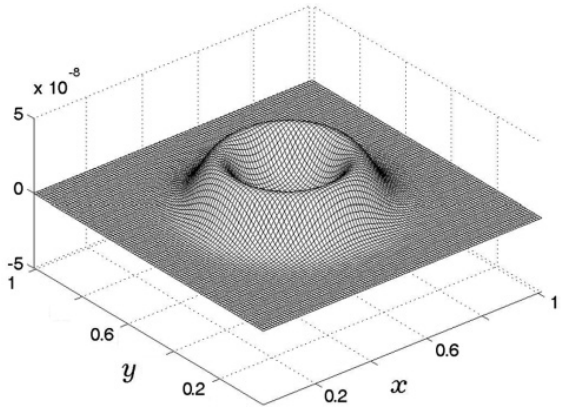


Рис. 8.21. Скорость w на 50 шаге

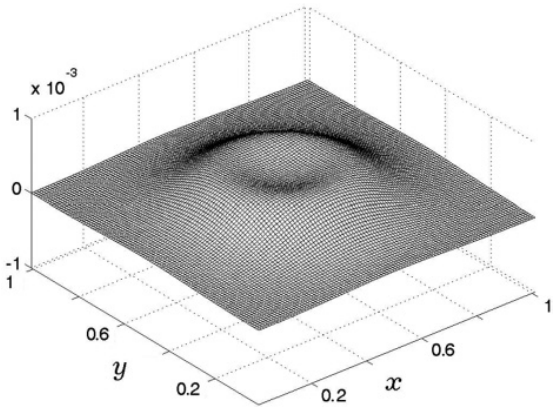


Рис. 8.22. Скорость w на 300 шаге

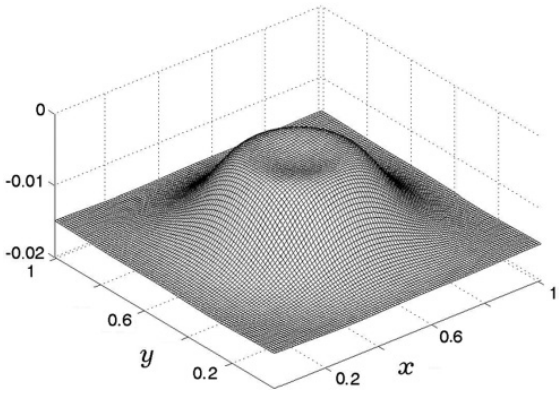


Рис. 8.23. Скорость w на 3000 шаге

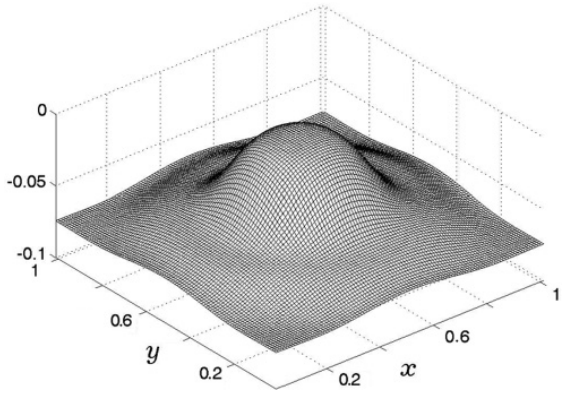


Рис. 8.24. Скорость w на 10000 шаге

По найденным во внутренних узлах расчетной сетки компонентам скорости и плотности можно рассчитать безразмерное значение энергии движения газа в каждый фиксированный момент времени в расчетной области D.

В работе была рассчитана полная кинетическая энергия W конвективного потока, учитывающая все три компоненты вектора скорости частиц газа

$$W = \iiint\limits_D \rho \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dD. \tag{8.5}$$

На приведенном далее рис. 8.25 представлен результат расчета этой энергии за фиксированный промежуток времени от начала нагрева.

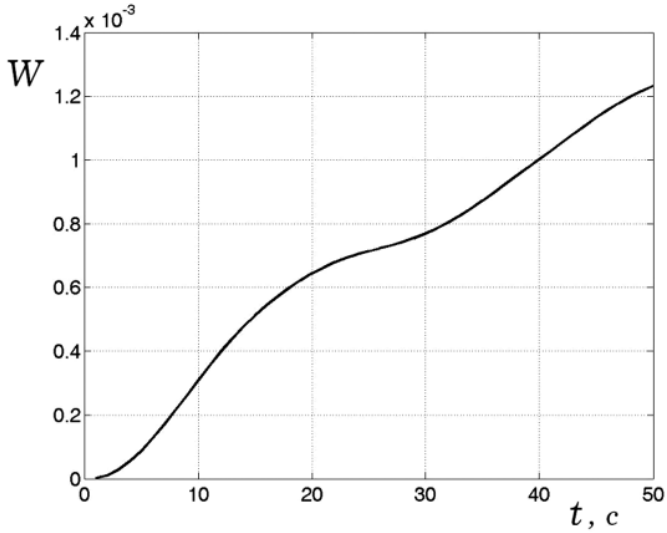


Рис. 8.25. Полная кинетическая энергия

Интерпретация представленной на рис. 8.25 зависимости кинетической энергии от времени является следующей. В начальные расчетные моменты времени поведение кинетической энергии описывается квадратичной функцией скорости. Затем за счет вовлечения в конвективный поток все больших масс газа подводимого количества тепла при нагреве оказывается недостаточно для увеличения скорости его частиц. На графике это фиксируется

как замедление роста кинетической энергии. При дальнейшем нагреве опять наблюдается рост скоростей и кинетической энергии конвективного потока.

И, наконец, приведены результаты расчетов и построений линий тока, дающие возможность визуально представить возникающий в данных условиях конвективный поток. Показано, что по мере возрастания времени нагрева существенным образом меняются и линии тока, показывающие траектории движения частиц газа в конвективном потоке.

На рис. 8.26–8.33 представлены результаты расчета линий тока газа для восьми расчетных шагов по времени. На всех представленных рисунках изображены линии тока конвективного течения газа, выпущенные с плоскости $z = 0$. Количество линий тока на всех рисунках одинаковое и составляет $10 \cdot 10 = 100$. В первой серии из четырех рисунков (рис. 8.26–8.29) представлены линии тока, соответствующие возрастанию геометрических размеров конвективного потока в зависимости от расчетного шага по времени, а во второй серии рисунков (рис. 8.30–8.33) изображены линии тока, соответствующие уменьшению геометрических размеров потока.

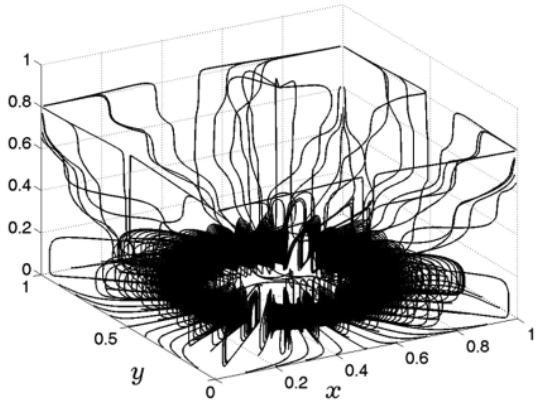


Рис. 8.26. Линии тока на 500 шаге

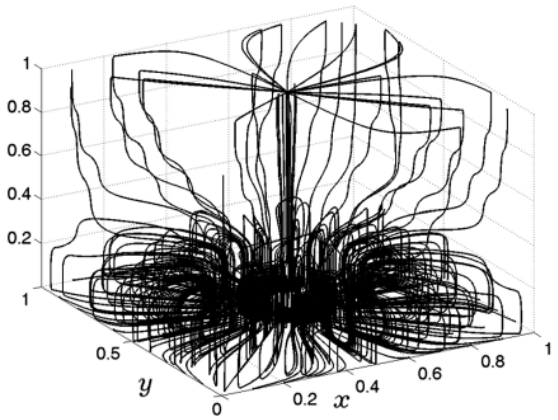


Рис. 8.27. Линии тока на 1000 шаге

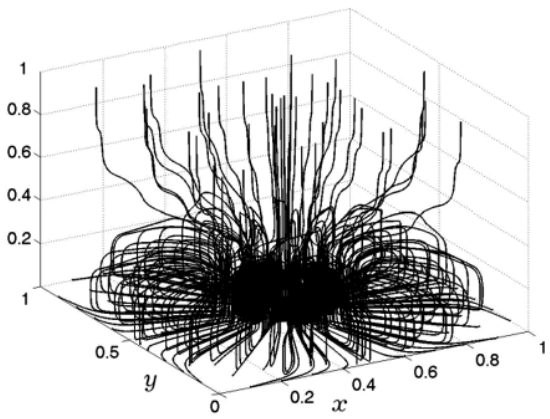


Рис. 8.28. Линии тока на 1500 шаге

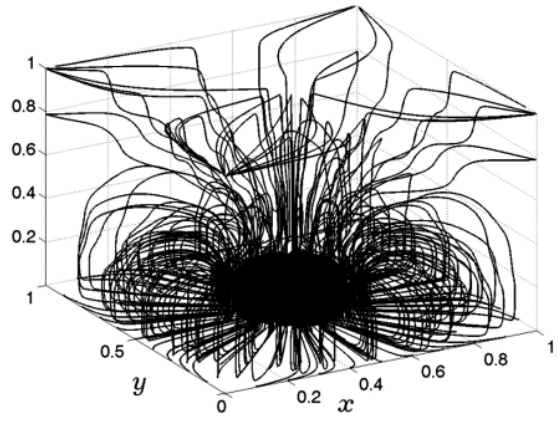


Рис. 8.29. Линии тока на 2000 шаге

При анализе построенных численно линий тока, представленных на рисунках, можно сделать следующие замечания относительно возникающего конвективного потока. К 500 расчетному шагу по времени (рис. 8.26) линии тока в основном сосредоточены над источником кольцеобразного нагрева в виде тора, имеют значительную густоту и занимают часть пространства по высоте до 0,2 (размерное значение до 2 м). Некоторые линии тока вырываются из кольцеобразного образования, и, имея волнистый характер, доходят до высоты 0,8 (размерное значение 8 м) и далее распространяются вдоль боковых граней расчетного куба.

С точки зрения движения газа как сжимаемой сплошной среды такое поведение линий тока к данному моменту расчетного времени означает формирование тороидального конвективного потока газа большой интенсивности вблизи источника нагрева подстилающей поверхности. Незначительная часть потока газа доходит до боковых граней на высоте 8 м и движется вдоль них. Тот факт, что конвективный поток в основном расположен вблизи подстилающей поверхности и небольшая часть его поднимается до высоты 8 метров, говорит о том, что прогрев основной части изолированного резервуара еще незначительный и конвективный поток не может преодолеть влияние силы тяжести.

Изменения в поведении построенных в результате расчетов линий тока к 1000 расчетному моменту времени (рис. 8.27) сводятся к следующему. При сохранении тороидального характера линий тока, они стали занимать большую часть расчетного пространства, доходя до боковых граней и поднимаясь на высоту 0,3 (размерное значение 3 м). В центре расчетной области возникает вертикальный столб, состоящий из нескольких линий тока, который доходит до верхней грани и далее радиально распространяется вдоль нее до боковых граней. Небольшая часть линий тока, вырывающаяся из тороидального конвективного потока, по-прежнему достигает боковых граней, но теперь поднимаются до верхней грани.

Поскольку прогрев к этому моменту расчетного времени существенно увеличился, то конвективный поток, захватывая все большие слои газа, увеличивается в размерах. Температура в кольце нагрева возрастает до значений, достаточных для преодоления силы тяжести вертикальным конвективным потоком.

Линии тока, построенные для 1500 расчетного шага по времени (рис. 8.28) и для 2000 расчетного шага по времени (рис. 8.29), продолжают тенденции в развитии конвективного потока. Все большие области газа вовлекаются в интенсивное конвективное движение. Высота его к 2000 шагу по времени достигает 0,6 (размерное значение 6 м). Все большее количество линий тока через центральный столб доходит до верхней грани, а затем устремляются к вертикальным ребрам расчетного куба.

Что касается второй серии рисунков (рис. 8.30–8.33), то на них изображены линии тока, соответствующие уменьшению геометрических размеров потока. Из результатов расчетов видно, что при сохранении большой

интенсивности (густота линий тока) линейные размеры конвективного потока постепенно уменьшаются с течением времени и к 4000 шагу достигает высоты 0,2 (размерное значение 2 м) и радиуса 0,2 (размерное 2 м).

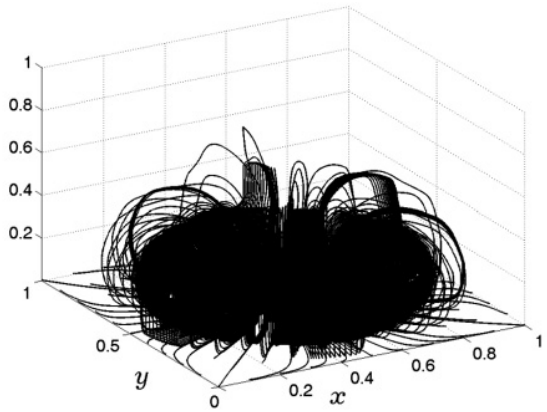


Рис. 8.30. Линии тока на 2500 шаге

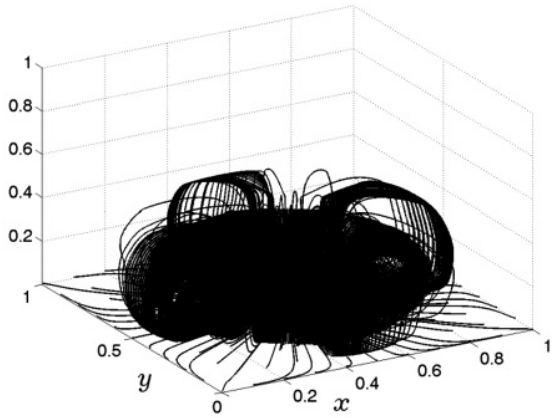


Рис. 8.31. Линии тока на 3000 шаге

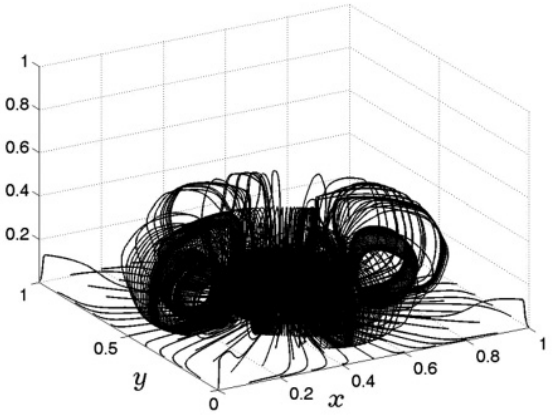


Рис. 8.32. Линии тока на 3500 шаге

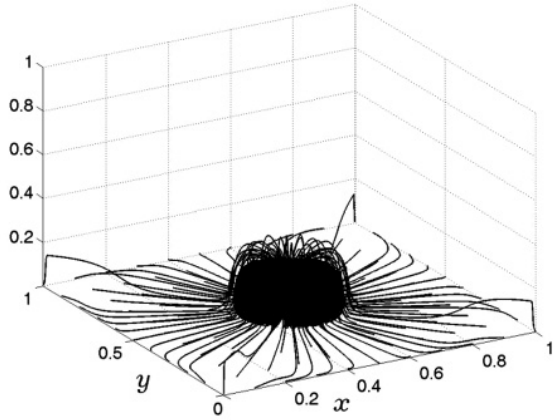


Рис. 8.33. Линии тока на 4000 шаге

Такое поведение конвективного течения газа объясняется, по-видимому, тем, что повышение температуры приводит к повышению давления в расчетном объеме и, как следствие, к сокращению размеров области движения газа.

Для описания нестационарных трехмерных конвективных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в замкнутой кубической области рассмотрено численное решение полной системы уравнений Навье – Стокса. Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными. За начальные условия принимаются функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье – Стокса. В качестве краевых условий предлагаются условия непротекания и теплоизоляции.

Возникающий при кольцеобразном нагреве нижней грани расчетной области конвективный поток газа в условиях действия силы тяжести имеет ярко

выраженный нестационарный характер, более отчетливо проявляющийся в начальной стадии его формирования.

Прежде всего, это касается термодинамических характеристик – температуры, плотности и давления. Показано, что термодинамические параметры имеют сложную структуру и существенным образом зависят от формы нагрева, высоты и времени нагрева.

Рассчитаны три компоненты вектора скорости для начальной стадии формирования конвективного потока и показано, что компоненты скорости имеют также сложную структуру и существенным образом зависят от формы нагрева, высоты и времени нагрева.

Построенные линии тока частиц газа показывают, что течения сжимаемого теплопроводного газа в условиях теплоизоляции и непротекания имеют сложный характер. Показано, что конвективное течение газа в начальной стадии его формирования существенно зависит от формы нагревательного элемента, температуры и времени нагрева.

Численное решение в нестационарном случае полной системы уравнений Навье – Стокса с корректно поставленными начальными и краевыми условиями позволяет сделать вывод о том, что предложенная вычислительная схема работает корректно, начальные и краевые условия адекватны исследуемым течениям газа, возникающим в результате кольцевого нагрева, и результаты расчетов получаются понятными с физической точки зрения. Дальнейшая работа в этом направлении может быть связана с продолжением расчета конвективных течений газа для больших расчетных шагов по времени.

§9. Численное исследование конвективных течений в зависимости от степени нагрева

Данный параграф посвящен описанию результатов численных расчетов скоростных характеристик трехмерного нестационарного конвективного течения газа, вызванного локальным круговым прогревом нижней поверхности и изучение их зависимости от максимальной температуры нагрева в условиях действия силы тяжести.

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 1$ вдоль осей Ox, Oy и Oz соответственно. Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда ставится «условие непрерывности» потока. Краевые условия для компонент вектора скорости газа на верхней и нижней гранях соответствуют «условиям непротекания» для нормальной составляющей вектора скорости и «условиям непрерывности» для двух других компонент вектора скорости течения.

Все компоненты вектора скорости на четырех боковых гранях рассчитываются из «условия непрерывности». Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчетной области.

Для температуры на пяти гранях задаются условия теплоизоляции.

Исходя из общих физических соображений, область нагрева должна обладать следующими свойствами.

1. Нагрев предполагается симметричным относительно точки (x_0, y_0) – геометрического центра квадрата в основании параллелепипеда.

2. Диаметр пятна нагрева должен быть равен примерно пятой части длины стороны квадрата, то есть $d = 0{,}2$.

3. Минимальная температура нагрева равна масштабному значению температуры $T_{00} = 1$ (размерное значение 288 °К = 15 °С) вне круга диаметром $d = 0{,}2$.

4. Максимальная температура нагрева равна 1,125 (размерное значение 324 °К = 51 °С) должна быть в геометрическом центре в основании параллелепипеда.

5. Переход от минимальной температуры к максимальной должен осуществляться плавно без скачков и резких изменений.

6. Поверхность, изображающая температуру нагрева как функцию координат точек плоскости, лежащих в плоскости основания параллелепипеда, вблизи окружности диаметром d должна быть вогнутой.

7. Нагрев до максимальной температуры должен происходить не мгновенно, а постепенно и достаточно медленно.

Поэтому на плоскости z = 0 значения температуры задаются функцией

$$T\big|_{z=0} = T_0(t,x,y) = 1 + M\left(1 - e^{-10t}\right)\cos^6\left(\pi\sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2}\right) \qquad (9.1)$$

моделирующей локальный круговой нагрев нижней поверхности, удовлетворяющий всем указанным выше свойствам. Задаваемый коэффициент M в формуле (9.1) определяет максимальное значение температуры нагрева в разных вариантах расчета и равен разности между максимальным безразмерным значением температуры локального нагрева и масштабным безразмерным значением температуры $M = T_{\max} - 1$.

Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно $\rho_{00} = 1{,}2928$ кг/м^3, $u_{00} = 333$ м/с, $x00 = 100000$ м, $t_{00} = x_{00}/u_{00} = 300{,}3$ с.

Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}01$, а шаг по времени $\Delta t = 0{,}001$.

Далее приводятся результаты расчета только скоростных характеристик конвективного течения при семи различных фиксированных максимальных температурах нагрева нижней плоскости расчетной области. При этом уделяется особое внимание температурным зависимостям трех составляющих скоростей конвективного потока.

В табл. 9.1 приведены фиксированные безразмерные и соответствующие размерные значения коэффициента M, для которых проведены расчеты.

Таблица 9.1

Значения коэффициента M

Безразмерное M	0,035	0,065	0,095	0,125	0,155	0,185	0,215
Размерное M^*, °К	10,08	18,72	27,36	36,00	44,74	53,28	61,92
$T_{00} + M^*$, °К	298,08	306,72	315,36	324,00	332,74	341,28	349,92
$T_{00} + M^*$, °С	25,08	33,72	42,36	51,00	59,74	68,28	76,92

Все последующие результаты будут относиться к тому расчетному моменту времени, для которого происходит выход нестационарного конвективного потока на стационарный режим.

На рис. 9.1 представлены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой u, второй v, максимального и минимального значений третьей w компоненты скорости течения газа на нижней грани расчетной области при $z = 0$.

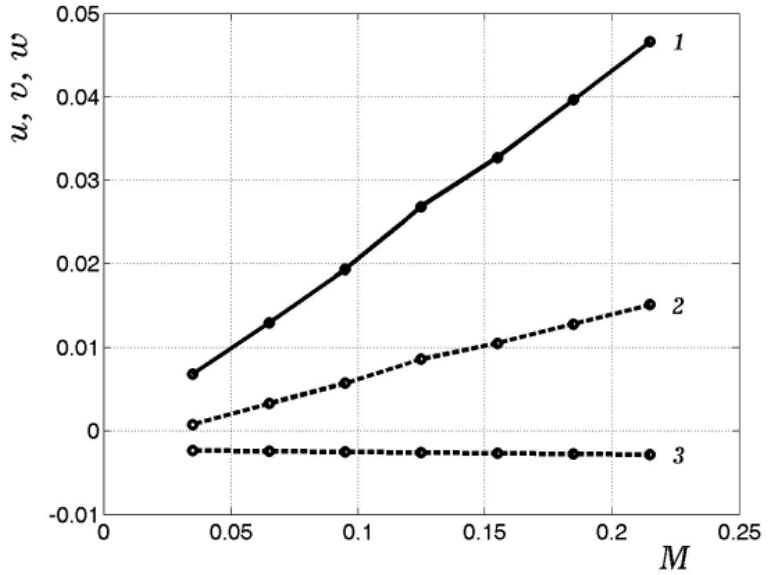


Рис. 9.1. Температурные зависимости скоростей на высоте $h = 0$ км:
1 – скорости u и v; 2 – максимум скорости w; 3 – минимум скорости w

На рис. 9.2 представлены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой u, второй v, максимального и минимального значений третьей w компоненты скорости течения газа на средней плоскости расчетной области при $z = 0{,}5$.

На рис. 9.3 приведены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой u, второй v, максимального и минимального значений третьей компоненты w скорости течения газа на верхней грани расчетной области при $z = 0{,}1$.

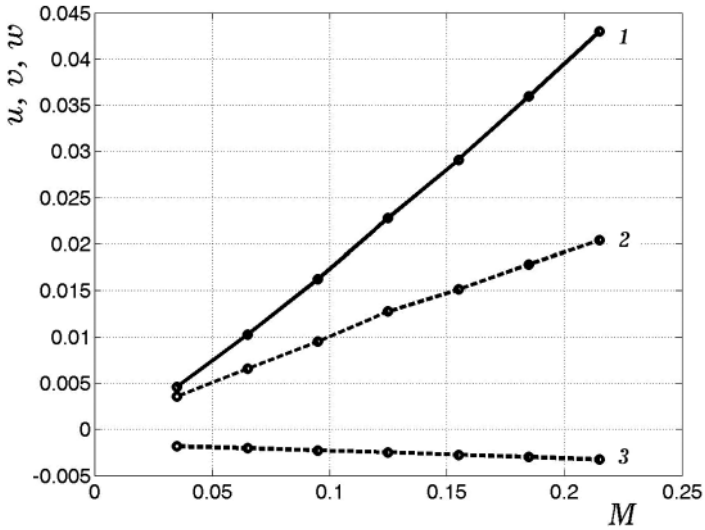


Рис. 9.2. Температурные зависимости скоростей на высоте h = 5 км:
1 – скорости u и v; 2 – максимум скорости w; 3 – минимум скорости w

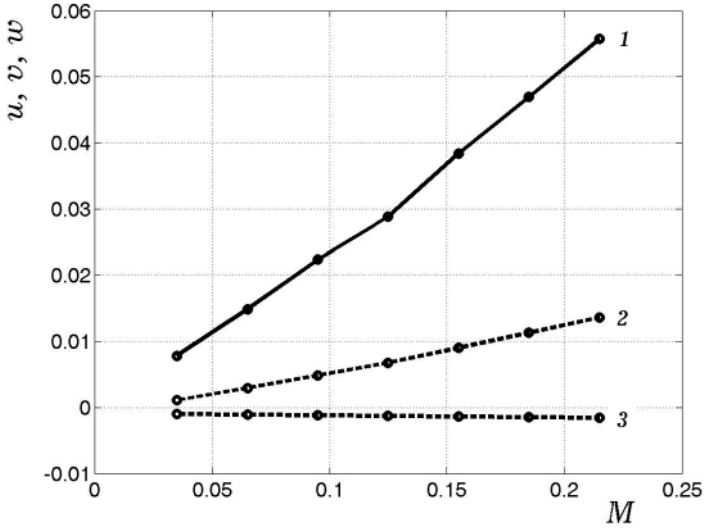


Рис. 9.3. Температурные зависимости скоростей на высоте h = 10 км;
1 – скорости u и v; 2 – максимум скорости w; 3 – минимум скорости w

Как следует из приведенных графиков, общей чертой в поведении скоростей теплового конвективного потока является их практически линейная зависимость от максимальной температуры нагрева. При этом для диапазона изменения максимальной температуры нагрева 0,18 (размерное значение 51,84 °C) интервал изменения модуля первой u и второй v компоненты скорости течения газа в безразмерном виде составляет в среднем 0,045 (размерное значение 14,985 м/с), а интервал изменения модуля третьей компоненты w скорости газа – 0,0175 (размерное значение 5,828 м/с).

На рис. 9.4–9.6 представлены мгновенные линии тока конвективного течения газа для трех различных моментов времени: под буквой *а* изображены

линии тока, рассчитанные для значения коэффициента $M = 0{,}035$, а под буквой b – для значения коэффициента $M = 0{,}215$.

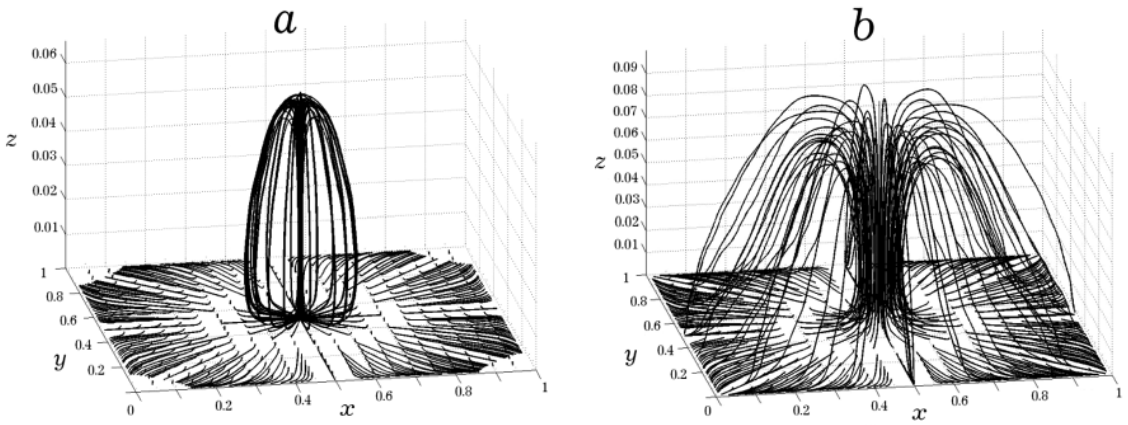


Рис. 9.4. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:
a – для $M = 0{,}035$; b – для $M = 0{,}215$

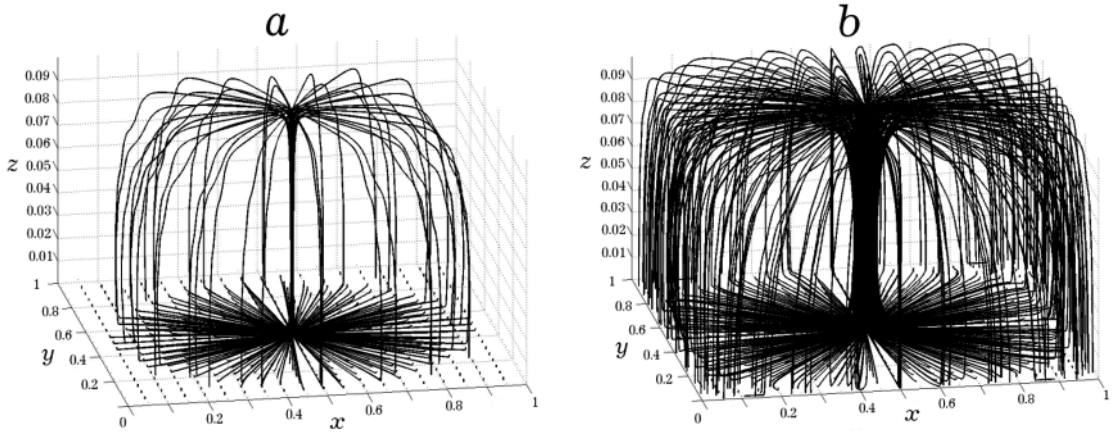


Рис. 9.5. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:
a – для $M = 0{,}035$; b – для $M = 0{,}215$

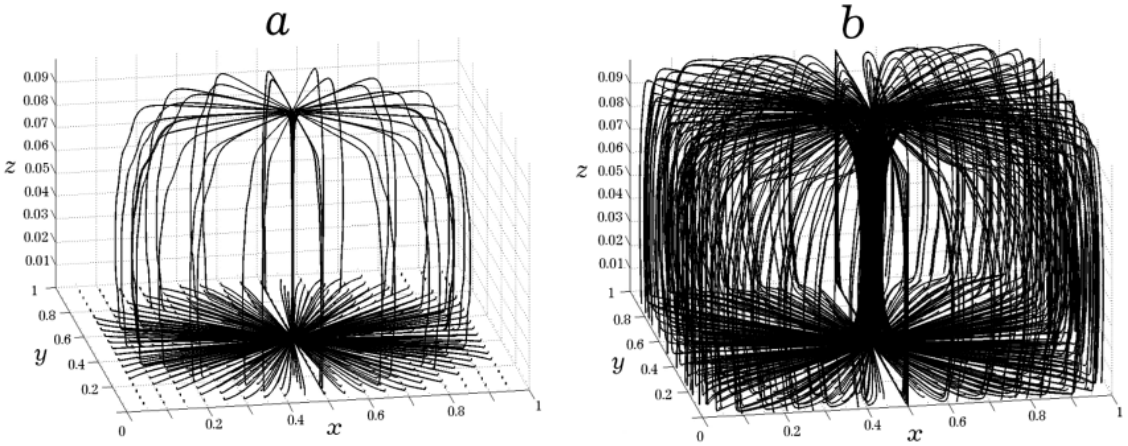


Рис. 9.6. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:
a – для $M = 0{,}035$; b – для $M = 0{,}215$

Из сопоставления приведенных рисунков для линий тока можно сделать следующие выводы. Очевидно, что для одних и тех же моментов времени густота мгновенных линий тока существенно отличается – для более низкой температуры нагрева ($M = 0{,}035$) она значительно меньше, чем при большей температуре нагрева ($M = 0{,}215$). При этом важно подчеркнуть, что в расчетах количество линий тока, выпускаемых из плоскости $z = 0$, в обоих случаях одинаково. Различие в густоте линий тока означает различие в интенсивности конвективного потока за счет различия скоростей течения при разных температурах нагрева.

Кроме того, формирование конвективного потока при более высоких температурах нагрева происходит существенно быстрее, чем при низких температурах. На рисунках видно, что при низкой температуре мгновенные линии тока не достигают боковых граней расчетной области. Поэтому данный конвективный поток в некотором смысле не является полноценным, в отличие от конвективного потока при высокой температуре.

В результате численным решением в нестационарном трехмерном случае полной системы уравнений Навье – Стокса с корректно поставленными начальными и краевыми условиями получено конвективное течение, вызванное нагревом придонной части. Проведено исследование зависимости скоростей течений в конвективном потоке от температуры нагрева.

§10. Численное моделирование конвективных течений при локальной круговой схеме нагрева

В данном параграфе представлены результаты численного моделирования нестационарных трехмерных свободных конвективных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа при локальной круговой схеме нагрева. При численном решении полной системы уравнений Навье – Стокса при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности использовались начальные и краевые условия, полностью совпадающие с описанными в §9.

На рис. 10.1–10.2 представлены графики функции температуры для двух значений $z = 0{,}01$, $z = 0{,}09$ и для 3100 расчетного шага по времени. По осям x и y отложены безразмерные значения расстояния. Нагрев поверхности $z = 0$ осуществлялся в соответствии с формулой (9.1) до температуры $T = 1{,}125$ (размерное значение 324 °K = 51 °C). Из рисунков видно, что с ростом высоты, во-первых, значения температуры в целом уменьшаются, во-вторых, область нагрева расширяется и, наконец, с увеличением времени в центре области нагрева появляется область пониженной температуры.

На рис. 10.3–10.4 приведены графики функции плотности газа для двух значений $z = 0{,}01$, $z = 0{,}09$ и для 3100 расчетного шага по времени. На плоскости $z = 0{,}01$ в центре нагрева наблюдается область пониженной плотности, значения плотности с ростом высоты уменьшаются, и происходит формирование области повышенной плотности. Такое поведение плотности газа обусловлено его движением вверх у нижней поверхности и его торможением при приближении к верхней плоскости, ограничивающей расчетную область.

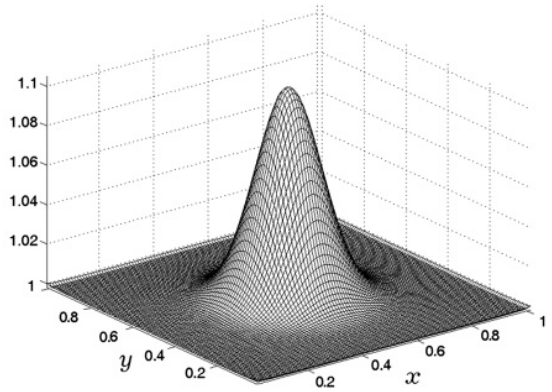


Рис. 10.1. Температура при $z = 0{,}01$

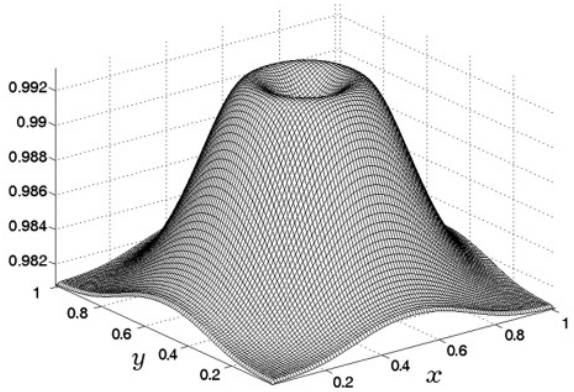


Рис. 10.2. Температура при $z = 0{,}09$

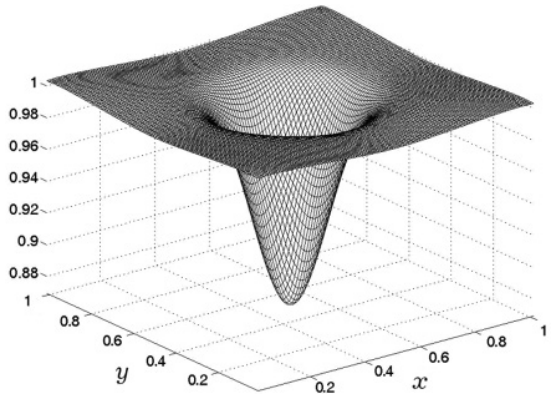


Рис. 10.3. Плотность при $z = 0{,}01$

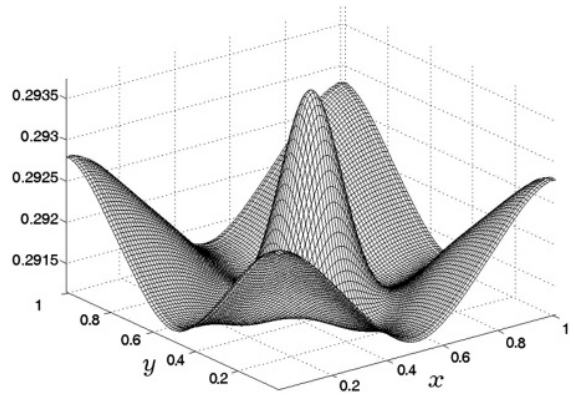


Рис. 10.4. Плотность при $z = 0{,}09$

На рис. 10.5–10.6 даны графики функции u – первой компоненты скорости газа для тех же значений высоты и того же значения времени. На высоте $z = 0{,}01$ (1 км) в области нагрева эта компонента скорости имеет разные по знаку значения, модуль которых на данный момент времени достигает значений 0,02 (размерное значение 6,66 м/с). На высоте 5 км (плоскость $z = 0{,}05$) знаки этой компоненты скорости меняют знак на противоположный и модуль скорости равен 0,01 (размерное значение 3,33 м/с). При дальнейшем увеличении высоты знак скорости не меняется, а величина возрастает опять до значения 0,02. Подобное поведение x-й компоненты скорости обусловлено тем, что в придонной части возникающего к данному моменту времени движения газа наблюдается сходящийся к центру расчетной области поток газа и по мере движения его вверх он становится расходящимся.

На рис. 10.7–10.8 приводятся графики функции v – второй компоненты скорости газа для тех же значений высоты и того же значения времени. Поведение этой компоненты скорости аналогично поведению предыдущей, но относительно перпендикулярного направления. Это также свидетельствует о наличии сходящегося потока газа в нижней части, и расходящегося потока – в верхней.

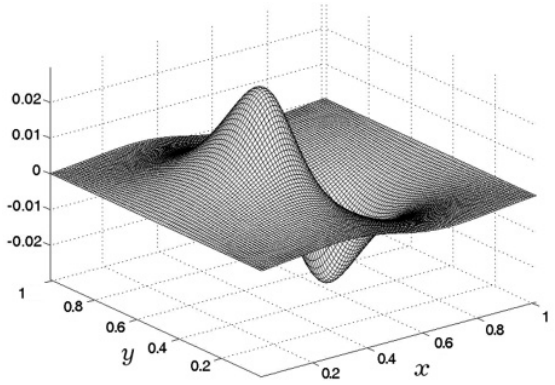


Рис. 10.5. Скорость *u* при *z* = 0,01

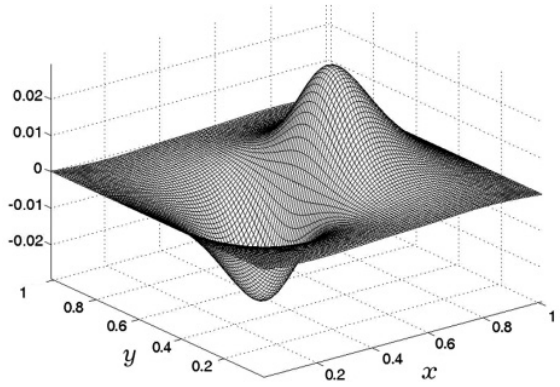


Рис. 10.6. Скорость *u* при *z* = 0,09

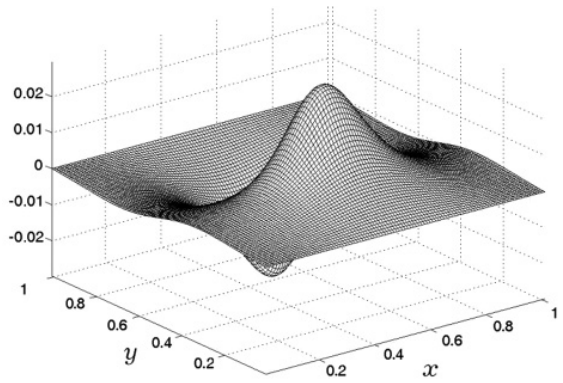


Рис. 10.7. Скорость *v* при *z* = 0,01

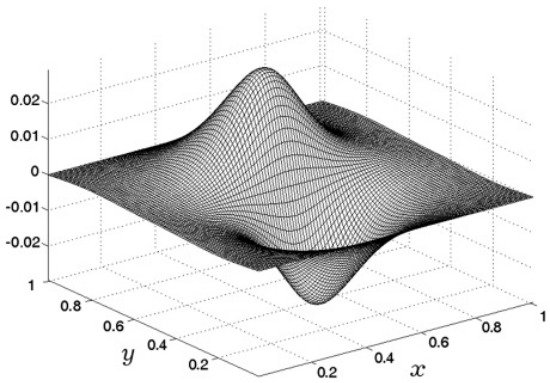


Рис. 10.8. Скорость *v* при *z* = 0,09

Результаты расчета вертикальной компоненты скорости *w* изображены на рис. 10.9–10.10 для того же момента времени, и тех же значений высоты. Расчеты показывают, что для данного момента времени максимальную вертикальную скорость 0,02 (размерное значение 6,66 м/с) поток газа имеет в средней части изменения высоты.

Характерным является положительное значение вертикальной скорости внутри области нагрева, и отрицательное – вне этой области.

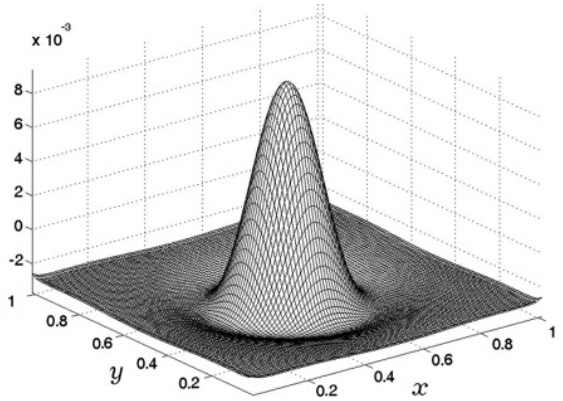


Рис. 10.9. Скорость *w* при *z* = 0,01

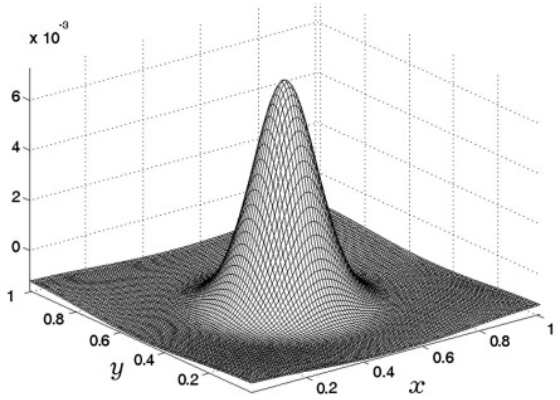


Рис. 10.10. Скорость *w* при *z* = 0,09

На последних рис. 10.11–10.16 представлены результаты расчета нескольких линий тока в некоторые моменты времени, которые наглядно показывают направления движения частиц газа и постепенное формирование непрерывного конвективного течения, вызванного вложением внешней энергии в виде нагрева нижней плоскости при учете силы тяжести.

На рисунках приведены результаты расчета до 3100 шага по времени. Расчеты при дальнейшем увеличении времени показали, что конвективное течение к 20000 расчетным шагам выходит на стационарный режим.

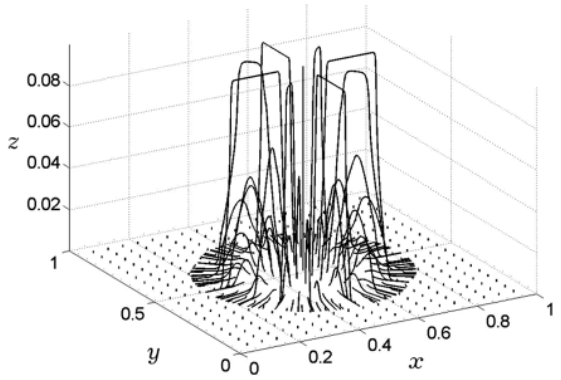


Рис. 10.11

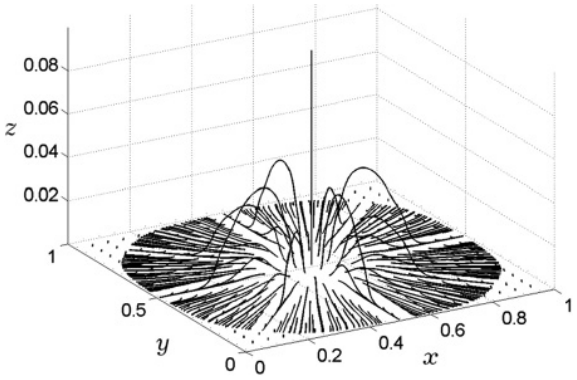


Рис. 10.12

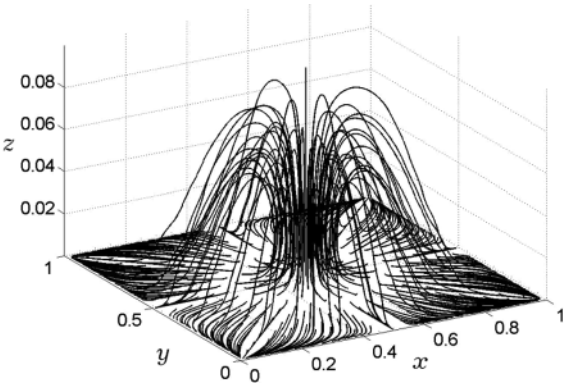


Рис. 10.13

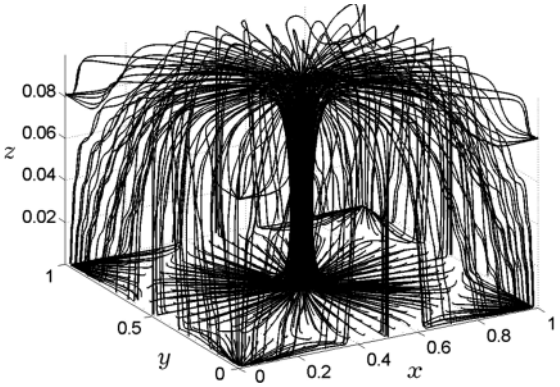


Рис. 10.14

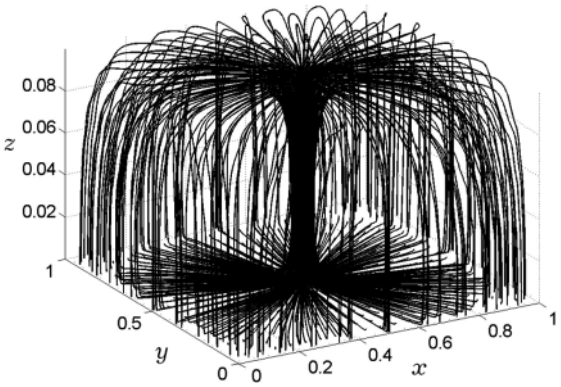


Рис. 10.15

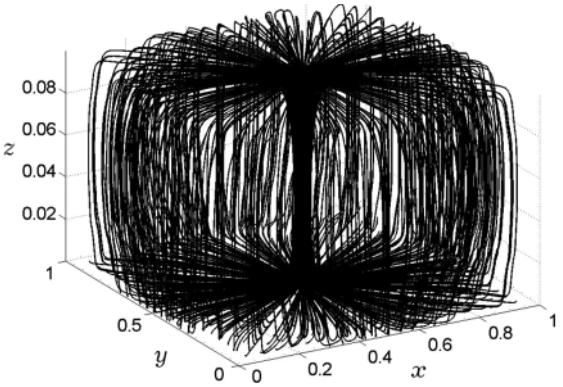


Рис. 10.16

Во всех рассмотренных вариантах расчета начальной стадии возникновения конвективных потоков наблюдается только радиальное движение газа. Такое поведение газа является следствием отсутствия в полной системе уравнений Навье – Стокса слагаемых, описывающих влияние силы Кориолиса.

Таким образом, численное решение в нестационарном случае полной системы уравнений Навье – Стокса с корректно поставленными начальными и краевыми условиями позволяет получить известное стационарное конвективное течение, вызванное локальным круговым нагревом придонной части [122]. Именно такой механизм формирования стационарного радиального течения в придонной части с дополнительным учетом силы Кориолиса, предложенный в [123] и более детально исследованный в [89], лежит в основе возникновения и функционирования природных восходящих закрученных потоков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим основные результаты исследований, приведенных в данном учебном пособии.

1. В модели сжимаемой сплошной среды предложены конкретные начально-краевые условия для полной системы уравнений Навье – Стокса, позволяющие численно строить решения для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в начальной стадии теплового конвективного потока, инициированного локальным прогревом подстилающей поверхности в условиях действия силы тяжести.

2. Предложены математические модели локального кругового и кольцевого нагрева вязких сжимаемых теплопроводных газов, которые в условиях действия силы тяжести приводят к возникновению конвективных потоков.

3. Численными методами впервые построены трехмерные нестационарные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в разномасштабных конвективных потоках при условии действия силы тяжести.

4. Показано, что при отсутствии учета действия силы Кориолиса в конвективных потоках не возникает осевая закрутка газа. Движение газа в этом случае имеет только радиальный характер.

5. С помощью явных разностных схем и предложенных двух конкретных начально-краевых условий построены приближенные решения полной системы уравнений Навье – Стокса и определены термодинамические, газодинамические, скоростные и энергетические характеристики трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в возникающих конвективных потоках.

6. Численными экспериментами проведено исследование зависимости скоростей течений в возникающем конвективном потоке сжимаемого вязкого теплопроводного газа от температуры нагрева.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 4-е изд. – М.: Наука. – Т. 1, 1983. – 536 с. – Т. 2, 1984. – 560 с.

2. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. – Новосибирск: Изд. НГУ. – Ч. 1, 1976. – 76 с. – Ч. 2, 1977. – 70 с.

3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 592 с.

4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.

5. Жермен П. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 400 с.

6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.

7. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.

8. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

9. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости // ПММ. – 1963. – № 5. –С. 779–783.

11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя // ПМТФ. – 1965. – № 6. – С. 55.

12. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // ДАН СССР. – 1979, т. 249, № 3. – С. 580–584.

13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1980. № 6. – С. 28–34.

14. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Конвективная устойчивость в вертикальном слое. – М.: Наука. – 1985.

15. Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен: пер. с англ. – М.: «Энергия», 1972. – 448 с.

16. Вульфсон Н.И. Исследование конвективных движений в свободной атмосфере. – М.: АН СССР, 1961. – 522 с.

17. Шкляев С.В. Влияние осложняющих факторов на устойчивость конвективных течений в слоях. – Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2000. – 150 с.

18. Зимин В.Д. Турбулентная конвекция в замкнутых объемах. – Дисс... докт. физ.-мат. наук. – Пермь, 1983. – 349 с.

19. Сухановский А.Н. Экспериментальные исследования спиральных течений жидкости в замкнутых объемах. – Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2005. – 108 с.

20. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование термогравитационной конвекции в замкнутом объеме с локальными источниками тепловыделения // Теплофизика и аэромеханика. – 2006. – том 13, № 4. – С. 611–621.

21. Кузнецов Г.В., Максимов В.И., Шеремет М.А. Естественная конвекция в замкнутом параллелепипеде при наличии локального источника энергии // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 86–95.

22. Терешко Д.А., Алексеев Г.В. Обратные задачи и задачи управления для нестационарных уравнений тепловой конвекции. Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – с. 274.

23. Ахметов Д.Г., Ахметов Т.Д. Структура течения в вихревой камере. Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – с. 24.

24. Евграфова А.В., Попова Е.Н., Сухановский А.Н. Конвективные течения над локализованным источником тепла. Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – с. 98.

25. Аристов С.Н., Князев Д.В. Неосесимметричные течения вязкой жидкости между подвижными вращающимися плоскостями. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 24.

26. Князев Д.В. Осесимметричные течения несжимаемой жидкости между подвижными вращающимися дисками // Известия АН. МЖГ. – 2011. – № 4. – С. 72-79.

27. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Слоистые течения изотермически вязкой несжимаемой жидкости. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24-27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 25.

28. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547-566.

29. Васильев А.Ю., Фрик П.Г. Перебросы крупномасштабной циркуляции при конвективной турбулентности в кубической полости. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24-27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 62.

30. Brown R.A., Etling D. Roll vortices in the planetary boundary layer: A review // Boundary – Layer Meteor. – 1993. – Vol. 65, No.3. – P. 215-248.

31. Sparrow E.M., Husar R.B. Longitudial vortices in natural convection flow on inclined plates // J. Fluid Mech. 1969. – Vol. 37. – Pt.2. – P. 251255.

32. Schroder E., Buhler K. Three-dimensional convection in rectangular domains with horisintal throughflow // Intern. J. Heat Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 7. – P. 1249–1259.

33. Баталов В.Г., Сухановский А.Н., Фрик П.Г. Экспериментальное исследование спиральных валов в адвективном потоке, натекающем на горячую горизонтальную поверхность // МЖГ. – 2007. – № 4 – С. 39-49.

34. Богатырев Г.П. Возбуждение циклонического вихря или лабораторная модель тропического циклона // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 51, Вып. 11. – С. 557-559.

35. Евграфова А.В., Сухановский А.Н., Попова Е.Н. Динамика мелкомасштабной конвекции в пограничном слое над нагретым диском. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24-27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 101.

36. Мамыкин А.Д., Васильев А.Ю., Колесниченко И.В., Фрик П.Г., Халилов Р.И. Конвективный теплоперенос натрия в наклонном цилиндре. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24-27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 195.

37. Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. – Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Москва, 2000. – 269 с.

38. Гончарова О.Н. Математические модели конвекции при пониженной гравитации. – Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 2005. – 243 с.

39. Юсупов И.Ю. Исследование движения вязкой теплопроводной жидкости с переменными характеристиками. – Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Чебоксары, 2000. – 131 с.

40. Шарфарец Е.Б., Шарфарец Б.П. Свободная конвекция. Учет некоторых физических особенностей при моделировании конвективных течений с помощью вычислительных пакетов // Научное приборостроение. – 2014. – Т. 24, № 2. – С. 43–51.

41. Гончарова О.Н. Точные решения линеаризованных уравнений конвекции слабо сжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 52-63.

42. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 728–392 с.

43. Peyret R., Viviand H. (1975). Computation of Viscous Compressible Flows Based on the Navier-Stokes Equations. – AGARD-AG-212.

44. MacCormack R. W. A969). The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. – AIAA Paper 69–354, Cincinnati, Ohie.

45. MacCormack R. W. (1981). A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow.– AIAA Paper 81-0110, St. Louis, Missouri.

46. Мак-Кормак Р. В. Численный метод решения уравнений вязких течений. – Аэрокосмическая техника, 1983, т. 1, № 4, с. 114–123.

47. MacCormack R.W., Baldwin B.S. (1975). A Numerical Method for Solving the Navier–Stokes Equations with Application to Shock–Boundary Layer Interactions. – AIAA Paper 75–1, Pasadena, California.

48. Болдуин Б., Мак-Кормак Р. Взаимодействие сильной ударной волны с турбулентным пограничным слоем. – В сб.: Численное решение задач гидромеханики. – М.: Мир, 1977, с. 174–183.

49. Chorin A. J. (1967). A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. – J. Comp. Phys., v. 2, p. 12–26.

50. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуби Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье – Стокса. – М: Наука, 1987. – 272 с.

51. Пивоваров Д.Е. Влияние ширины прямоугольного канала на устойчивость свободноконвективного течения, вызванного температурным градиентом. Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – с. 223.

52. Чупин А.В. Установившиеся и нестационарные течения несжимаемой жидкости в тороидальном канале. Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – с. 302.

53. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Математическое моделирование двухслойных конвективных течений с испарением на границе раздела для жидкостей с нормальным и аномальным термокапиллярным эффектом. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 86.

54. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69–72.

55. Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Численное исследование процессов тепломассопереноса в жидкой сферической оболочке со свободными границами. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 119.

56. Чупин А.В. Особенности течения несжимаемой жидкости во вращающемся тороидальном канале. Материалы XIX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 346.

57. Зубков П.Т., Климин В.Г. Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 4. – С. 171.

58. Гореликов А.В., Зубков П.Т., Моргун Д.А. Смешанная конвекция чистой воды в квадратной ячейке с движущейся верхней стенкой // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 8. – С. 69.

59. Галиев И.М., Зубков П.Т. Влияние инверсии плотности воды на плоскопараллельное течение и теплоперенос в канале постоянной ширины // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2000. – № 1. – С. 72.

60. Зубков П.Т., Тарасова Е.Н. Гидродинамика и теплообмен в канале с кольцевыми ребрами // Теплофизика высоких температур. – 2004. – Т. 42, № 6. – С. 917-920.

61. Зубков П.Т., Канашина М.В., Калабин Е.В. Процесс переноса тепла естественной конвекцией в квадратной полости, температура одной из стенок которой меняется по синусоидальному закону // Теплофизика высоких температур. – 2004. – Т. 42, № 1. –С. 118-124.

62. Зубков П.Т., Канашина М.В., Калабин Е.В. Свободноконвективный перенос тепла в квадратной полости при периодическом изменении температуры одной из стенок // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 397, № 3. – С. 334–336.

63. Зубков П.Т., Серебряков В.В., Сон Э.Е., Тарасова Е.Н. Стационарное течение двух вязких несмешивающихся несжимаемых жидкостей в плоском канале // Теплофизика высоких температур. – 2005. – Т. 43, № 5. – С. 768–773.

64. Brauner N., Moalem Maron D. Two-phase Lquid-liquid Stratified Flows // PhysicoChem. Hydrodynamics. –1989. – Vol. 11. – P. 487.

65. Theron B.E., Unwin T. Stratified Flow Model and Interpretation in Horizontal Wells // Schlumberger Cambridge Research. – 1996. – SPE 36560.

66. Brauner N., Moalem Maron D. Flow Pattern Transitions in Two-phase Liquid-liquid Flows in Horizontal Tubes // Int. J. Multiphase Flow. – 1992. – Vol. 18(1). – P. 123.

67. Одишария Г.Э., Точигин Л.Л. Прикладная гидродинамика газожидкостных смесей. – М.: Всероссийский НИИ природных газов и газовых технологий. – Ивановский гос. энергетич. ун-т. – 1998. – 400 с.

68. Губайдуллин А.А., Зубков П.Т., Свиридов Е.М. Термоакустические волны, возникающие при нагреве совершенного вязкого газа // Теплофизика высоких температур. – 2005. –Т. 42, № 5. – С. 753.

69. Spradley E.W., Churchill S.W. Pressure- and Buoyancy-Driven Thermal Convection in a Rectangular Enclosure // J . Fluid Mech. – 1975. – Vol. 70. – P. 705.

70. Yufeng Huang, Halm H. Bau. Thennoacoustic Waves in a Semi-Infinite Medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 8. – P. 1329.

71. Губайдуллин А.А., Зубков П.Т., Свиридов Е.М., Тарасова Е.Н. Влияние термоакустических волн на теплоперенос в слое сжимаемой среды // Теплофизика высоких температур. – 2006. – Т. 44, № 6. – С. 956–960.

72. Зубков П.Т., Шелковый Г.М. Стационарные естественно-конвективные течения в квадрате // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2007. – № 2. – С. 83–91.

73. Зубков П.Т., Канашина М.В., Тарасова Е.Н. Явление гистерезиса в двумерной и трехмерной задачах естественной конвекции // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2007. – № 2. – С. 106–110.

74. Атманских М.Б., Зубков П.Т. Влияние температурных и термоакустических волн на распространение тепла в слое совершенного вязкого газа // Динамика сплошной среды. – 2010. – № 126. – С. 37.

75. Зубков П.Т., Яковенко А.В. Тепловое и динамическое воздействие газа на границы вибрирующей области // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2012. – № 4. – С. 29–33.

76. Зубков П.Т., Яковенко А.В. Расчет влияния вибрации на область, заполненную совершенным вязким газом // Теплофизика высоких температур. – 2012. – Т. 50, № 3. –С. 401.

77. Зубков П.Т., Лумпова А.Н., Сон Э.Е. Стабилизированное течение термовязкой несжимаемой жидкости в плоском канале // Тепловые процессы в технике. – 2013. – № 11. – С. 487–491.

78. Зубков П.Т., Яковенко А.В. Влияние вибрации на область с газом при адиабатических и изотермических граничных условиях // Теплофизика и аэромеханика. – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 283–294.

79. Зубков П.Т., Лумпова А.Н., Сон Э.Е. Стабилизированное течение жидкости в плоском канале при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры // Тепловые процессы в технике. – 2014. – № 12. – С. 538–542.

80. Сафиуллина М.В. Численное исследование естественной конвекции в двухмерной и трехмерной наклонных полостях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Тюмень, 2008. – 74 с.

81. Кравченко В.А. Численное исследование естественной конвекции и фазовых переходов в прямоугольных и цилиндрических полостях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Тюмень, 2000. – 142 с.

82. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Из-во Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.

83. Цепелев И.А. Итерационный алгоритм решения ретроспективной задачи тепловой конвекции вязкой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 119–127.

84. Ряховский А.В. Математическое моделирование естественной конвекции во вращающихся сферических слоях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Сургут, 2013. – 143 с.

85. Зайцев В.А. Математическое моделирование свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферических объемах: Дисс. ... канд. техн. наук. – Воронеж, 2006. – 165 с.

86. Шеремет М.А. Нестационарная сопряженная термогравитационная конвекция в цилиндрической области с локальным источником энергии // Теплофизика и аэромеханика. – 2011. – Т. 18, № 3. – С. 463–474.

87. Баутин С.П., Обухов А.Г. Моделирование спиральных течений в придонной части восходящего закрученного потока. – Екатеринбург: УрГУПС, 2011. – 80 с.

88. Баутин С.П., Белова Е.Д., Замыслов В.Е., Крутова И.Ю., Мезенцев А.В., Обухов А.Г., Баутин П.С. Математическое моделирование природных восходящих закрученных потоков типа торнадо. // Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. № 4, часть 2. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2011. – 594 с.

89. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. – Новосибирск: Наука, 2012. – 160 с.

90. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2012, № 4. – С. 175-183.

91. Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2012, № 4. – С. 183–189.

92. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т.51. – № 4.– С. 567–570.

93. Баутин С.П., Обухов А.Г. Mathematical Simulation of the Near-Bottom Section of an Ascending Twisting Flow // High Temperature. – 2013. – V. 51. – No. 4. – P. 509–512.

94. Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81 –86.

95. Баутин С.П., Обухов А.Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 5. – С. 55–63.

96. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.

97. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 3. – С. 88–94.

98. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2014. – № 7. – С. 157–165.

99. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 5 – С. 57–62.

100. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численное исследование термодинамических параметров закрученного потока газа при холодном вертикальном продуве // Инновации и инвестиции. – 2014. – № 8. – С. 167–170.

101. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Расчет скоростей и линий тока трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Инновации и инвестиции. – 2014. – № 9. – С. 139–142.

102. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Нефтегазовое дело. – 2014. – Том 12, № 3. – С. 116–122.

103. Обухов А.Г., Баранникова Д.Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 6 – С. 65–70.

104. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет скоростных характеристик закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Т. 1, № 2(2). – С. 124–130.

105. Obukhov A.G., Bautin S.P., Abdubakova L.V. Numerical calculation of thermodynamic parameters unsteady three-dimensional rising swirling flow air // 5th International Conference on Science and Technology by SCIEURO in London, 22-28 June 2015. – p. 16–24.

106. Баутин С.П., Обухов А.Г. Учет влияния центробежной силы при численном моделировании восходящего закрученного потока газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2015. – № 4 – С. 92–97.

107. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. – 2015. – Т. 53, № 6. – С. 961–964.

108. Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G. Twisting of a Fire Vortex Subject to Gravity and Coriolis Forces // High Temperature. – 2015. – Vol. 53, No. 6, pp. 921–923.

109. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. – 2015. – Т. 4. – № 5. – С. 397-400.

110. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо // Сборник научных трудов Научной сессии НИЯУ МИФИ-2015. Пятое заседание тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». 5-6 февраля 2015 г. – Снежинск. М.: НИЯУ МИФИ; Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. – С. 113–116.

111. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Моделирование закрученных потоков воздуха с вертикальным продувом // Сборник научных трудов Научной сессии НИЯУ МИФИ-2015. Пятое заседание тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». 5–6 февраля 2015 г. Снежинск. М.: НИЯУ МИФИ; Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. – С. 98–103.

112. Баранникова Д.Д., Обухов А.Г. Моделирование теплового восходящего закрученного потока воздуха // Сборник научных трудов Научной сессии НИЯУ МИФИ-2015. Пятое заседание тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». 5–6 февраля 2015 г. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. – С.107 – 111.

113. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – с. 35.

114. Баутин С.П., Абдубакова Л.В., Баранникова Д.Д., Казачинский А.О., Крутова И.Ю., Мезенцев А.В., Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое и экспериментальное моделирование восходящих закрученных потоков // Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 20–24 августа 2015 года. – С. 378–380.

115. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты // Материалы VIII международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященной 115-летию академика М.А.Лаврентьева. – Новосибирск, 7–11 сентября 2015 года. – С. 79–80.

116. Баутин С.П. Представление решений системы уравнений Навье – Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, вып. 4. – С. 574–584.

117. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 2009. – 368 с.

118. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.

119. Баутин С.П., Замыслов В.Е. Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье – Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии. – 2012. –Том 17, № 3. – С. 3–12.

120. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука. – 1968. – 529 с.

121. В.Е. Замыслов, П.П. Скачков. Сравнение двух приближенных методов решения одной начально-краевой задачи газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности // Вестник УрГУПС. – 2012. – № 4(16). – С. 29–38.

122. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкостей и газов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 184 с.

123. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.

Учебное издание

Обухов Александр Геннадьевич
Сорокина Елена Михайловна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Учебное пособие

9 785913 274700

Компьютерный набор, корректура
и форматирование авторов
Технический редактор Кулакова Г.А.
Подписано в печать 08.06.2017
Бумага офсетная.
Гарнитура PetersburgC
Формат 60×84 1/8
Печать трафаретная. Печ. л. 11,75.
Тираж 500 экз. Заказ № 032-17.

Отпечатано в типографии ИД «Академия Естествознания»,
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 3